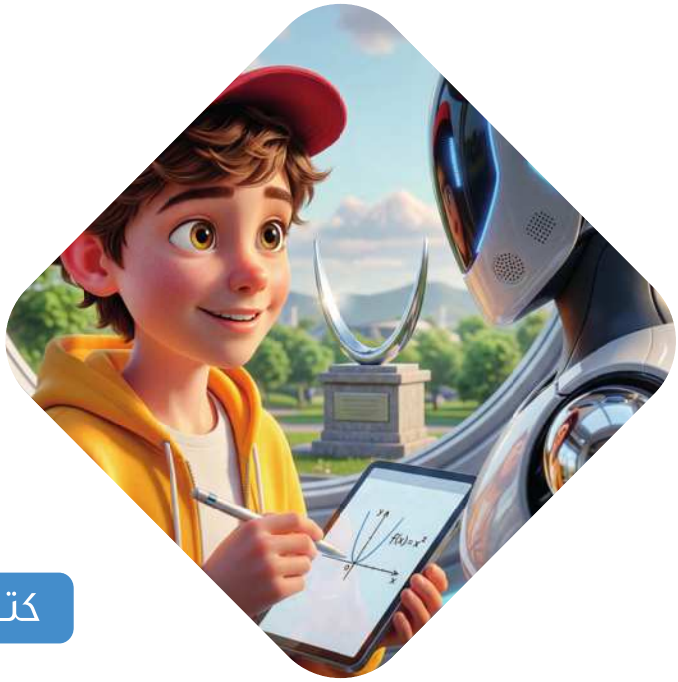
تهدى وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
هذا الكتاب بكل الحب إلى الطلاب والمعلمين والأسرة
فى جمهورية مصر العربية



كتاب الطالب

الرياضيات

للصف الثالث الإعدادى - الفصل الدراسى الأول

2026 - 2027

الاسم: ....

الفصل: ....

المدرسة: ....

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تأليف

- أ. أســامــة زيـد شـــريف
- أ. د. سمر عبد الفتاح لاشين
- أ. م. د. أمل الشحات حافظ
- أ. مجدى عبد الفتاح الصفتى
- أ. إبراهيم عبد اللطيف الصغير
- أ. باسم مجدى رشدى
- أ. إسلام محمد إبراهيم
- أ. سامح لبيب عطية

مراجعة

- أ. د. جلال محروس معتمد
- أ. د. رضا أبو علوان السيد
- أ. د. هدى كمال محمد السيد
- أ. د. أحمد عبد القادر رمضان
- د. محمد محي الدين عبد السلام
- أ. منال عباس أحمد عزقـــول
- أ. سميــر محمــد ســعــداوى
- أ. عمـاد حسـن عمـر الدليل
- أ. سامح عبد الباسط السيد

الإشراف العام

د/ جبريل أنور حميدة

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

جميع الحقوق محفوظة© وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني بجمهورية مصر العربية – ٢٠٢٦ / ٢٠٢٧

لا يجوز نسخ أي جزء من هذا المنتج، أو تخزينه في نظام لاسترجاع المعلومات، أو نقله بأي شكل أو بأي وسيلة – إلكترونية أو تصويرية أو تسجيلية أو غير ذلك – دون الحصول على إذن كتابي مسبق من وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقديم

فى إطار التطوير المستمر لمنظومة التعليم، واستكمالًا لمنظومة التطوير التى بدأت خططها من مرحلة رياض الأطفال والمستمرة إلى نهاية المرحلة الثانوية وفقًا لرؤية مصر (٢٠٣٠) ، وخطة الوزارة لتطوير التعليم - فقد تم إعداد هذا الكتاب لاستكمال وتنفيذ عمليات تطوير مناهج المرحلة الإعدادية لإحداث نقلة نوعية فى طريقة إعداد طلاب مصر لمواجهة تحديات المستقبل.

يُسعدنا أن نقدم هذا الكتاب لمقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى للفصل الدراسى الأول، والذى يتضمن مجموعة من المهام والأداءات التى تساعد الطلاب على حل المشكلات الرياضية ، وذلك لتحقيق نواتج التعلم لمواجهة تحديات القرن الحادى والعشرين، والذى واكبت بدايته ثورة متسارعة فى المعلومات وتكنولوجيا الاتصالات.

يهدف المنهج إلى إحداث نقلة نوعية فى تعليم الرياضيات وتعلُّمها، كما يهدف أيضًا إلى توفير وسيلة فعالة لتحقيق أهداف نهج التعليم على نحو تكاملى عن طريق الآتي:

- التأكيد على الدور الإيجابى للطالب فى عملية التعلم.
- تضمين المنهج المعارف والمهارات والقيم والاتجاهات الإيجابية اللازمة للتعلم وللمواطنة الصالحة والعمل المنتج والمشاركة الفاعلة فى تحقيق برامج التنمية المستدامة.
- تضمين المنهج التوجهات الإيجابية الحديثة فى بناء المناهج، مثل مهارات التفكير ومهارات حل المشكلات ومهارات التعلم الذاتى والتعلم التعاونى والتواصل الجيد مع مصادر المعرفة.
- تنمية المهارات الأدائية من خلال التركيز على التعلم الذاتى والعمل التعاونى.
- تحقيق التكامل بين الرياضيات والمواد الدراسية عبر المراحل المختلفة.
- إتاحة الفرصة للطلاب لاختيار الأنشطة المناسبة لقدراتهم وميولهم وحاجاتهم.

ونسأل الله عز وجل أن تعم الفائدة من هذا الكتاب، ونتمنى أن يكون جزءًا من مجهود وطنى كبير ومتواصل للارتقاء بمصر إلى مصاف الدول المتقدمة لضمان مستقبل عظيم لجميع طلابها، كما نتمنى لكم عامًا دراسيًا جديدًا مليئًا بالنجاحات والتوفيق.

والله وليّ التوفيق،،،

المعدون

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

محتويات الكتاب (الفصل الدراسي الأول)

الأعداد والعمليات عليها

1-1 قُوى القُوى 2
1-2 المعادلات الأسية 7

الجبــر

2-1 الدالة التربيعية 14
2-2 مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود 22
2-3 دوال الكسور الجبرية النسبية 27
2-4 المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية .. 33
2-5 العمليات على الكسور الجبرية النسبية 38

الهندسة

3-1 تشابه المضلعات 48
3-2 تشابه المثلثات 55
3-3 التمدد 62
3-4 النسب المثلثية للزاوية الحادة 68
3-5 النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة 74
3-6 العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين 80
3-7 معادلة الخط المستقيم 86

الإحصاء

4-1 مقاييس التشتت 96

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة **1**

الأعداد والعمليات عليها

دروس الوحدة

1-1 قُوى القُوى

1-2 المعادلات الأسية

يسهم مفهوم المعادلات الأسية في تسريع وتطوير تطبيقات الذكاء الاصطناعى، مما يجعل النماذج الذكية أكثر قدرة على التنبؤ بالنتائج بناءً على العلاقات الرياضية بين المتغيرات.

◀ فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين المعادلات الأسية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعي؟

القضايا والمهارات

- التفكير الرياضى.
- التفكير الناقد.
- الاستنتاج الرياضى.
- التفكير الإبداعى.

القيــــم

- التذوق الجمالى.
- الوعى السياحى.
- العمل الجماعى.
- الوعى البيئى.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الدرس

1 - 1

قُوى القُوى
(Powers of Powers)

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم قوة القوة.
- توجد قوة القوة لعدد حقيقى.
- تستخدم قانون قوة القوة فى تبسيط تعبيرات رياضية.
- تستخدم قانون قوة حاصل ضرب قوتين / خارج قسمة قوتين فى حل مشكلات حياتية.

■ المفردات

• أس	Exponent
• أساس	Base
• قوة	Power
• قوة القوة	Power of a power

■ معلومة سابقة

قوانين الأسس :

لأى عددين حقيقيين a ، b حيث $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، وعددين صحيحين m ، n يكون :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6. $a^0 = 1$

استعد !

يُعد متحف الأحياء المائية بالإسكندرية أحد أشهر المعالم التعليمية والسياحية بالمدينة، يقع بجوار قلعة قايتباى بالأنفوشى، ويضم مجموعة من الأحواض الزجاجية التى تعرض أسماكًا وسلاحف وكائنات بحرية مختلفة بالإضافة إلى معروضات مُحنَّطة .

متحف الأحياء المائية بالإسكندرية

بفرض أن أحد الأحواض مكعب الشكل طول حرفه 2^7 سم، فما حجم الماء الذى يمكن أن يستوعبه هذا الحوض؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم قانون قوة القوة؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

أمامك مجموعة من البطاقات تحمل كل منها تعبيرًا رياضيًا، اختر جميع البطاقات التى تحمل تعبيرًا رياضيًا يساوى التعبير الرياضى الذى تحمله البطاقة الحمراء. ناقش.

$(x^4 y^3)^2$

$x^{42} y^{32}$ $x^8 y^6$ $x^6 y^5$

$x^3 y^4 \times x^5 y^2$ $(x^2)^4 (y^2)^3$

تعلم !

قانون قوة القوة

4 عوامل

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$$

لاحظ أن : 12 هى حاصل ضرب الأسين الأصليين : 3 ، 4 $(12 = 3 \times 4)$

أى أن : لإيجاد قوة القوة نضرب الأسس.

بصفة عامة :

لأى عدد حقيقى a لا يساوى الصفر، وعددين صحيحين m ، n يكون :

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

فمثلًا : • $(7^{-2})^5 = 7^{-2 \times 5} = 7^{-10}$ • $(5^4)^2 = 5^{4 \times 2} = 5^8$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 1

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1 $\dfrac{(2^{11})^2 \times 2^3}{(2^6)^3 \times 2^4}$ 2 $\dfrac{(x^2)^{-3} \times (x^{-1})^2}{x^{-3} \times x^{-4}}$ 3 $\dfrac{4^{x+2} \times 9^{3+x}}{6^{2x+3}}$

(1)

$$\frac{(2^{11})^2 \times 2^3}{(2^6)^3 \times 2^4} = \frac{2^{11\times 2} \times 2^3}{2^{6\times 3} \times 2^4} = \frac{2^{22} \times 2^3}{2^{18} \times 2^4}$$

$$= \frac{2^{22+3}}{2^{18+4}} = \frac{2^{25}}{2^{22}} = 2^{25-22} = 2^3 = 8$$

(2)

$$\frac{(x^2)^{-3} \times (x^{-1})^2}{x^{-3} \times x^{-4}} = \frac{x^{2\times(-3)} \times x^{-1\times 2}}{x^{-3} \times x^{-4}} = \frac{x^{-6} \times x^{-2}}{x^{-3} \times x^{-4}}$$

$$= \frac{x^{-6+(-2)}}{x^{-3+(-4)}} = \frac{x^{-8}}{x^{-7}} = x^{-8-(-7)} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

(3)

$$\frac{4^{x+2} \times 9^{3+x}}{6^{2x+3}} = \frac{(2^2)^{x+2} \times (3^2)^{3+x}}{(2 \times 3)^{2x+3}} = \frac{2^{2x+4} \times 3^{6+2x}}{2^{2x+3} \times 3^{2x+3}}$$

$$= 2^{(2x+4)-(2x+3)} \times 3^{(6+2x)-(2x+3)}$$

$$= 2^{2x+4-2x-3} \times 3^{6+2x-2x-3}$$

$$= 2^1 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$$

قانون قوة حاصل ضرب قوتين

قانون قوة خارج قسمة قوتين

لأى عددين حقيقيين a ، b لا يساويان الصفر، وثلاثة أعداد صحيحة k ، n ، m يكون :

$$(a^m \times b^n)^k = a^{mk} \times b^{nk}$$

فمثلًا :

$$(2^3 \times 3)^4 = 2^{3\times 4} \times 3^{1\times 4}$$

$$= 2^{12} \times 3^4$$

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^k = \frac{a^{mk}}{b^{nk}}$$

فمثلًا :

$$\left(\frac{2^3}{7^2}\right)^5 = \frac{2^{3\times 5}}{7^{2\times 5}} = \frac{2^{15}}{7^{10}}$$

مثال 2

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

1 $(-2x^2y)^3 \times (x^{-1}y^2)^{-1}$ 2 $\left(\dfrac{2a^2b^2}{b^{-1}a^4}\right)^3$

■ تقييم ذاتى (1)

اختصر إلى أبسط صورة كلًا من :

1 $\dfrac{((\sqrt{5})^3)^2 \times \sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^5}$

2 $\dfrac{a^4 \times (a^{-1})^4}{(a^2)^5 \times (a^5)^{-2}}$

3 $\dfrac{36^n \times 5^{2n}}{30^{2n}}$

■ لاحظ أن :

القسمة على صفر ليس لها معنى، وعلى هذا فإنه عند وجود رموز فى المقام يُشترط لهذه الرموز ألا تساوى الصفر.

■ فكر وناقش

1 هل $(x^3)^2 = (x^2)^3$ ؟

2 هل $(9^2)^2 = 3^8$ ؟

3 هل $(2^2)^3 = 2^{2^3}$ ؟

■ لاحظ أن

$(a^m + b^n)^k \neq a^{mk} + b^{nk}$

$(a^m - b^n)^k \neq a^{mk} - b^{nk}$

■ تقييم ذاتى (2)

اختصر إلى أبسط صورة كلًا من :

1 $(3xy^4)^{-2} \times ((-2y)^2)^3$

2 $\left(\dfrac{4m^2n^{-3}}{n^{-4}m^3}\right)^{-2}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

$$(-2x^2y)^3 \times (x^{-1}y^2)^{-1} = (-2)^3 x^{2\times3} y^3 \times x^{-1\times(-1)} y^{2\times(-1)}$$
$$= -8x^6y^3 \times x y^{-2} = -8x^{6+1}y^{3-2}$$
$$= -8x^7 y$$
(1)

$$\left(\frac{2a^2b^2}{b^{-1}a^4}\right)^3 = \frac{2^3 a^{2\times3} b^{2\times3}}{b^{-1\times3}a^{4\times3}} = \frac{8a^6b^6}{b^{-3}a^{12}}$$
$$= 8a^{6-12}b^{6+3} = 8a^{-6}b^9 = \frac{8b^9}{a^6}$$
(2)

مثال 3

اختصر إلى أبسط صورة $\frac{9^{2n-1}\times 18^{1-4n}}{36^{2-3n}}$

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند : $n=2$

$$\frac{9^{2n-1}\times 18^{1-4n}}{36^{2-3n}} = \frac{(3^2)^{2n-1}\times(2\times3^2)^{1-4n}}{(2^2\times3^2)^{2-3n}}$$
$$= \frac{3^{4n-2}\times2^{1-4n}\times3^{2-8n}}{2^{4-6n}\times3^{4-6n}}$$
$$= 2^{(1-4n)-(4-6n)}\times3^{(4n-2)+(2-8n)-(4-6n)}$$
$$= 2^{1-4n-4+6n}\times3^{4n-2+2-8n-4+6n} = 2^{2n-3}\times3^{2n-4}$$

قيمة الناتج عند $n=2$:

$$2^{2n-3}\times3^{2n-4} = 2^{2(2)-3}\times3^{2(2)-4}$$
$$= 2^1\times3^0 = 2\times1 = 2$$

مثال 4

ديكور : غرفة أرضيتها مربعة الشكل طول ضلعها $2x^3y^2$ وحدة طول، يُراد تبليطها ببلاط مربع الشكل طول ضلع كل بلاطة xy^2 وحدة طول. كم بلاطة تحتاجها لتغطية أرضية الغرفة بالكامل ؟

∵ مساحة المربع = مربع طول ضلعه

∴ مساحة أرضية الغرفة $= (2x^3y^2)^2$

$= 2^2x^6y^4$

$= 4x^6y^4$ وحدة مساحة

∵ مساحة البلاطة $= (xy^2)^2$

$= x^2y^4$ وحدة مساحة

∴ عدد البلاطات $= \frac{\text{مساحة أرضية الغرفة}}{\text{مساحة البلاطة}} = \frac{4x^6y^4}{x^2y^4}$

$= 4x^{6-2} = 4x^4$ بلاطة.

■ تنوع الاستراتيجيات

عدد البلاطات $= \frac{\text{مساحة أرضية الغرفة}}{\text{مساحة البلاطة}}$

$= \frac{(2x^3y^2)^2}{(xy^2)^2}$

$= \left(\frac{2x^3y^2}{xy^2}\right)^2$

$= (2x^2)^2$

$= 4x^4$

■ لاحظ أن

- $(-a)^n = a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا.
- $(-a)^n = -a^n$ إذا كان n عددًا صحيحًا فرديًا.

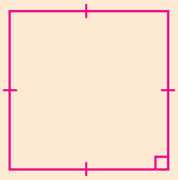
■ تقييم ذاتى 3

اختصر إلى أبسط صورة :

$$\frac{((\sqrt{5})^3)^{2x}\times(15)^{x-1}}{(75)^x}$$

ثم أوجد قيمة الناتج عند :
$x=1$

■ تقييم ذاتى 4



$3a^2x^3$ سم

أوجد مساحة المربع فى أبسط صورة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى مما يأتى يساوى $(a^4)^7$ ؟

(أ) a^3 (ب) a^{11} (جـ) a^{28} (د) a^{47}

② ما قيمة $(3^8)^0$ ؟

(أ) 3^8 (ب) 3^{80} (جـ) 1 (د) 24

③ أى مما يأتى يساوى $(3^4)^2 \times 3^5$ ؟

(أ) 3^{11} (ب) 3^{13} (جـ) 3^{40} (د) 9^{11}

④ ما ناتج $\frac{(x^3)^5}{(x^8)^2}$ فى أبسط صورة؟

(أ) $\frac{1}{x}$ (ب) x (جـ) x^{-2} (د) x^{31}

⑤ ما ناتج $x^2 \times (x^5)^2$ فى أبسط صورة؟

(أ) x^9 (ب) x^{12} (جـ) x^{14} (د) x^{20}

⑥ ما ناتج $(-a^3 b)^2$ فى أبسط صورة؟

(أ) $a^3 b^3$ (ب) $-a^5 b^3$ (جـ) $a^6 b^2$ (د) $-a^6 b^2$

⑦ إذا كان $2^x = 5$ فما قيمة 8^x ؟

(أ) 125 (ب) 32 (جـ) 27 (د) 15

⑧ ما ناتج $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^2$ فى أبسط صورة؟

(أ) $\frac{9a^4}{4b^3}$ (ب) $\frac{9a^4}{4b^2}$ (جـ) $\frac{3a^4}{2b^2}$ (د) $\frac{3a^4}{2b^3}$

◂ اكتشف الخطأ :

⑨ قام كل من خالد وأسماء باختصار $(a^2)^3 \times a^4$ لأبسط صورة، فكانت إجابتهما الموضحة. أى منهما إجابته صحيحة ؟ ناقش.

حل خالد :

$(a^2)^3 \times a^4 = a^5 \times a^4 = a^{20}$

حل أسماء :

$(a^2)^3 \times a^4 = a^6 \times a^4 = a^{10}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑩ أوجد كلًا مما يأتى فى أبسط صورة :

① $(a^4)^3 \times a^7$

② $(a^5)^2 \times (a^3)^3$

③ $(\sqrt{5})^3 \times ((-\sqrt{5})^2)^3$

④ $((-2)^3)^2 \times (-\sqrt{2})^{-4}$

⑤ $\frac{(a^2)^3}{a^4}$

⑥ $\frac{(a^4)^3}{(a^2)^5}$

⑦ $(((\sqrt{3})^3)^{-2})^{-1}$

⑧ $\frac{((-\sqrt{7})^2)^3 \times ((\sqrt{7})^3)^{-1}}{((\sqrt{7})^2)^{-2}}$

⑪ اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

① $(4a^4 b^3 c)^2$

② $(-2m^5 n^4)^3$

③ $\left(\frac{2r^2 s^{-1}}{r^3 s}\right)^{-2}$

④ $(c^3)^2 \times (-3c^7)^2$

⑤ $(-3x^2 y^3 z)^2 \times ((-x^2 y)^3)^2$

⑥ $\frac{5qp^{-2}}{(q^{-1}p)^3}$

⑦ $\frac{(2a^5)^3 \times (3a^3)^2}{(6a^7)^2 \times (a^{-1})^3}$

⑧ $\frac{(16x^2 y^{-2})^0}{(4x^0 y^{-6})^{-2}}$

⑨ $\left(\frac{5^0 c^2 d^3 f}{2c^4 d^{-4}}\right)^{-3}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑫ اختصر كلًا مما يأتى لأبسط صورة، ثم أوجد قيمة الناتج عند $x = 1$:

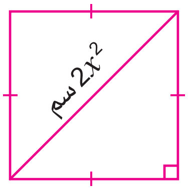
① $\dfrac{4^{x} \times 2^{x-4}}{16^{x-2}}$　　② $\dfrac{(4)^{x} \times (49)^{x-1}}{(98)^{x}}$

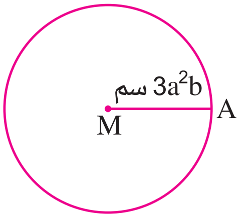
⑬ أثبت أن : $\dfrac{1}{27} = \dfrac{27^{x-1} \times 8^{x}}{(2\sqrt{2})^{2x} \times (3\sqrt{3})^{2x}}$

⑭ إذا كان : $3^{a} = 2$ أوجد قيمة : $9^{a} + (27)^{a}$

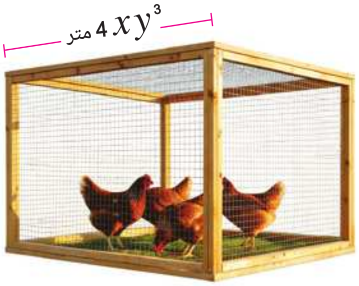
ثالثًا　التحليل وتكامل المواد

⑮ **هندسة :** أوجد مساحة كل شكل مما يأتى فى أبسط صورة :

①


②


⑯ **ثروة حيوانية :** حظيرة للدجاج مكعبة الشكل طول حرفها $4\,xy^3$ متر، أوجد حجم الحظيرة فى أبسط صورة.



الدواجن من أهم قطاعات الثروة الداجنة بمصر، وتعد مصدرًا هامًا للبروتين الحيوانى.

⑰ **مصادر الطاقة :** برميل أسطوانى لتخزين الوقود طول نصف قطر قاعدته $2\,kw^2$ متر وارتفاعه $4\,k$ متر، أوجد حجم البرميل فى أبسط صورة.

تقليل استهلاك الوقود يساهم فى خفض تلوث الهواء وحماية البيئة.

تفكير إبداعى

⑱ إذا كان : $10^{x} = 5^{x+1}$ أوجد قيمة 4^{x}

⑲ إذا كان : $a = 5^{30}$ ، $b = 3^{45}$ ، $c = 2^{60}$ رتب a ، b ، c ترتيبًا تصاعديًا.

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لقُوى القُوى ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس 2 - 1

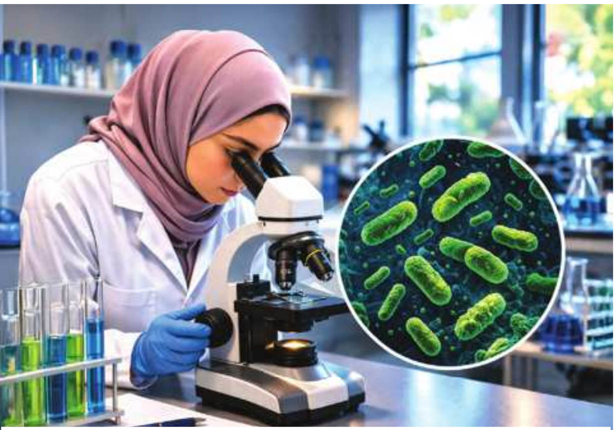
المعادلات الأسية
(Exponential Equations)

■ نواتج التعلم

- تحل المعادلات الأسية مستخدمًا قوانين الأسس.
- تستخدم المعادلات الأسية في حل مشكلات حياتية.

استعد !

تُعد البكتيريا كائنًا حيًا وحيد الخلية، لا يمكن رؤيته بالعين المجردة بل يُرى باستخدام الميكروسكوب.
وتتكاثر البكتيريا بطريقة تُسمى الانشطار الثنائي، حيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين كل ساعة.
إذا بدأنا بخلية بكتيرية واحدة، فبعد كم ساعة يصل عدد الخلايا الناتجة عن الانقسام إلى 1024 خلية؟


بكتيريا تحت الميكروسكوب

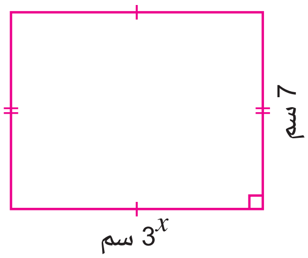
في هذا الدرس، سوف تتعرف على مفهوم المعادلة الأسية وكيفية حلها باستخدام قوانين الأسس؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- معادلة أسية
Exponential equation

فكر وناقش !

إذا كانت مساحة المستطيل المقابل تساوي 63 سم²، فما قيمة x ؟ ناقش.



تعلم !

المعادلة الأسية

المعادلة الأسية هي معادلة تحتوي على متغير في الأس.

أمثلة لمعادلات أسية :	أمثلة لمعادلات غير أسية :
• $2^x = 8$	• $x^2 = 9$
• $3^{x-4} = \frac{1}{9}$	• $x - 7 = 3^2$

وسوف تقتصر دراستنا هذا العام على دراسة المعادلة الأسية على الصورة $a^x = b$ حيث $a > 0$, $a \neq 1$

حل المعادلات الأسية

لحل المعادلات الأسية نستخدم خاصية تساوي القوى.

إذا كان $a^x = a^y$ حيث $a > 0$, $a \neq 1$ فإن : $x = y$

أمثلة : • إذا كان $3^x = 3^4$ ، فإن : $x = 4$

• إذا كان $5^x = 125$ ، فإن : $5^x = 5^3$ ومنها $x = 3$

■ لاحظ أن

يمكنك استخدام التحليل لكتابة الأعداد في صورة أسية

125	5
25	5
5	5
1	

$125 = 5^3$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 1

حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

1) $3^{x+1}=81$ 2) $2^{x-7}=\frac{1}{32}$ 3) $(\frac{2}{3})^{x+2}=\frac{27}{8}$

الحل

1) $\because 3^{x+1}=81$

أعد كتابة 81 فى صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 3

$\therefore 3^{x+1}=3^4$ $(81=3^4)$

الأساسان متساويان، فيكون الأُسَّان متساويين

$\therefore x+1=4$ $\therefore x=4-1=3$

2) $\because 2^{x-7}=\frac{1}{32}$

أعد كتابة العدد 32 فى صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 2

$\therefore 2^{x-7}=\frac{1}{2^5}$ $(32=2^5)$

$\therefore 2^{x-7}=2^{-5}$

الأساسان متساويان، فيكون الأُسَّان متساويين

$\therefore x-7=-5$ $\therefore x=7-5=2$

3) $\because (\frac{2}{3})^{x+2}=\frac{27}{8}$ $\therefore (\frac{2}{3})^{x+2}=\frac{3^3}{2^3}$

$\therefore (\frac{2}{3})^{x+2}=(\frac{3}{2})^3$

$\therefore (\frac{2}{3})^{x+2}=(\frac{2}{3})^{-3}$

$\therefore x+2=-3$ $\therefore x=-2-3=-5$

■ لاحظ أن

إذا كان a ، b عددين حقيقيين لا يساويان الصفر، n عددًا صحيحًا،

فإن : $(\frac{a}{b})^n=(\frac{b}{a})^{-n}$

فمثلًا : $(\frac{3}{2})^3=(\frac{2}{3})^{-3}$

مثال 2

حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

1) $9^{x+2}=3^x$ 2) $(125)^{x+1}=(625)^{x-1}$

3) $(\frac{3}{2})^{5-3x}=(\frac{4}{9})^{2x-7}$ 4) $2^{x^2}=16^{3-x}$

الحل

1) $\because 9^{x+2}=3^x$

أعد كتابة 9 فى صورة أسية بحيث يكون الأساس يساوى 3 $(9=3^2)$

$\therefore (3^2)^{x+2}=3^x$

استخدم قانون قوة القوة

$\therefore 3^{2x+4}=3^x$

الأساسان متساويان، فيكون الأُسَّان متساويين

$\therefore 2x+4=x$

$\therefore 2x-x=-4$

$\therefore x=-4$

2) $\because (125)^{x+1}=(625)^{x-1}$

أعد كتابة 125 ، 625 فى صورة أسية بحيث يكون لهما نفس الأساس "5"

$\therefore (5^3)^{x+1}=(5^4)^{x-1}$

استخدم قانون قوة القوة

$\therefore 5^{3x+3}=5^{4x-4}$

الأساسان متساويان، فيكون الأُسَّان متساويين

$\therefore 3x+3=4x-4$

$\therefore 4x-3x=3+4$

$\therefore x=7$

■ تقييم ذاتى (1)

حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

1) $2^{x-2}=8$

2) $(\frac{1}{2})^{2x-1}=32$

3) $\frac{125}{27}=(\frac{3}{5})^{x+2}$

■ التحقق من صحة الحل

يمكنك التحقق من صحة حل المعادلة 1 كالتالى :

عوض عن x بـ 3 فى المعادلة الأصلية

$3^{x+1}=81$

$3^{3+1}\overset{?}{=}81$

$3^4\overset{?}{=}81$

$81=81$ ✓ الجملة صحيحة

أى أن الحل يساوى 3

◂ حاول بنفسك التحقق من صحة الحل فى كل من المعادلتين 2 ، 3 بالمثال المجاور.

■ تقييم ذاتى (2)

حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

1) $27^{x-1}=3^{2x}$

2) $64^{x+1}=4^{x+7}$

3) $\frac{2^{x^2}}{16^x}=32$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

③

$\because \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2x-7}$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{2x-7}$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{2x-7}$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{2x-7}$

$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x+14}$

$\therefore 5 - 3x = -4x + 14$

$\therefore 4x - 3x = 14 - 5$

$\therefore$ $x = 9$

④

$\because 2^{x^2} = 16^{3-x}$

$\therefore 2^{x^2} = (2^4)^{3-x}$

$\therefore 2^{x^2} = 2^{12-4x}$

$\therefore x^2 = 12 - 4x$

$\therefore x^2 + 4x - 12 = 0$

$\therefore (x+6)(x-2) = 0$

$\therefore x + 6 = 0$ أ $x - 2 = 0$

$x = -6$ ، $x = 2$

ملاحظة:

• إذا كان $a^x = 1$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ فإن : $x = 0$

• إذا كان $a^x = b^x$ حيث $a > 0$ ، $b > 0$ ، $a \neq b$ فإن : $x = 0$

مثال ③

حل كلًا من المعادلتين الآتيتين فى R :

① $4^{x^2-9} = 1$ ② $2^{x+1} = 3^{x+1}$

① $\because 4^{x^2-9} = 1$

$\therefore x^2 - 9 = 0$ $\therefore x^2 = 9$

$\therefore x = \pm\sqrt{9}$ $\therefore$ $x = \pm 3$

② $\because 2^{x+1} = 3^{x+1}$

$\therefore x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = -1$

مثال ④

أوجد قيمة n فى كل مما يأتى :

① $\frac{2^n \times 9^{n+1}}{18^n} = 3^n$ ② $\frac{12^{n-1}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} = 1$

① $\because \frac{2^n \times 9^{n+1}}{18^n} = 3^n$

$\therefore \frac{2^n \times (3^2)^{n+1}}{(2 \times 3^2)^n} = 3^n$

$\therefore \frac{2^n \times 3^{2n+2}}{2^n \times 3^{2n}} = 3^n$

$\therefore 3^{2n+2-2n} = 3^n$

$\therefore 3^2 = 3^n$

$\therefore$ $n = 2$

② $\because \frac{12^{n-1}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} = 1$

$\therefore \frac{(3 \times 2^2)^{n-1}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} = 1$

$\therefore \frac{3^{n-1} \times 2^{2n-2}}{2^{n-1} \times 3^{n-1}} = 1$

$\therefore 2^{2n-2-n+1} = 1$

$\therefore 2^{n-1} = 1$

$\therefore n - 1 = 0$ $\therefore$ $n = 1$

■ **تقييم ذاتى ③**

حل كلًا من المعادلتين الآتيتين فى R :

① $2^{x^2} \times 2^x = 1$

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1} = 5^{1-2a}$

■ **تقييم ذاتى ④**

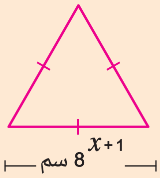
أوجد قيمة x فى كل مما يأتى :

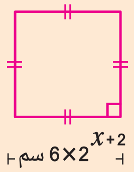
① $\frac{4^x \times 9^{2-x}}{6^{2x}} = 1$

② $\frac{2^x \times 3^x}{12^x} = \frac{1}{2}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

■ تقييم ذاتى (5)





إذا كان محيط المثلث المتساوى الأضلاع يساوى محيط المربع، فما طول ضلع كل منهما ؟

مثال (5)

فى الشكل المقابل :

صندوق من الكرتون على شكل متوازى مستطيلات حجمه 1 متر مكعب.

أوجد أبعاد الصندوق.

∵ حجم الصندوق $= \ell \times w \times h$

حيث : $\ell = 2^{x+2}$, $w = 2^{x+1}$, $h = 2^{x}$

$\therefore 2^{x+2} \times 2^{x+1} \times 2^{x} = 1$ ، $\therefore 2^{x+2+x+1+x} = 1$ ، $\therefore 2^{3x+3} = 1$

$\therefore 3x + 3 = 0$ ، $\therefore 3x = -3$ ، $\therefore x = \frac{-3}{3} = -1$

$\therefore \ell = 2^{-1+2} = 2$ ، $w = 2^{-1+1} = 2^{0} = 1$ ، $h = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

∴ أبعاد الصندوق هى : 2 متر ، 1 متر ، $\frac{1}{2}$ متر.

تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان : $2^{x-3} = 1$ فما قيمة x ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

(2) إذا كان : $2^{x} = 8$ فما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

(3) إذا كان : $3^{-x} = 3$ فما قيمة x ؟

(أ) -3 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 3

(4) إذا كان : $3^{x+2} = 3^{2x-1}$ فما قيمة x ؟

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

(5) إذا كان : $5^{x-1} = 3^{x-1}$ فما قيمة x ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 3 (د) 5

(6) إذا كان : $9^{x} = 27$ فما قيمة x ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) 3

(7) إذا كان : $5^{2x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-7}$ فما قيمة x ؟

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

(8) إذا كان : $3^{x} + 3^{x} = 6$ فما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 9

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(9) حل كلًا من المعادلات الآتية فى R :

(1) $5^{2x-1} = 125$ (2) $3^{2x-3} = \frac{1}{27}$ (3) $4^{1-2x} = 2$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} = 128$ (5) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} = \frac{8}{125}$ (6) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \frac{125}{27}$

(7) $7^{2x+3} = 7^{x-4}$ (8) $7^{x+2} = 2^{x} \times 2^{-x}$ (9) $9 \times 5^{x-1} = 25 \times 3^{x-1}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

10 أوجد مجموعة الحل فى R لكل من المعادلات الآتية :

① $(216)^x = \frac{1}{6^3}$ ② $(\frac{1}{4})^{2x-1} = 8^{x+3}$ ③ $32^{x-3} = 8^{2x+1}$

④ $\frac{36^{x+1}}{6^{x-1}} = \frac{1}{216}$ ⑤ $8^{x-1} \times 4^{2x+1} = 64$ ⑥ $\frac{8^x \times 9^x}{18^x} = 64$

11 إذا كان : $\frac{49^n \times 25^{2n} \times 3^{4n}}{7^{-n} \times 15^{4n}} = 343$ فأوجد قيمة 6^{2n}

◂ **ناقش :**

12 قام كل من مروان ومريم بحل المعادلة :

$16^{x+1} = 64^{x-1}$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل ؟

حل مروان :

$16^{x+1} = 64^{x-1}$

$(2^4)^{x+1} = (2^6)^{x-1}$

$2^{4x+4} = 2^{6x-6}$

$4x + 4 = 6x - 6$

$4 + 6 = 6x - 4x$

$10 = 2x \qquad x = 5$

حل مريم :

$16^{x+1} = 64^{x-1}$

$(4^2)^{x+1} = (4^3)^{x-1}$

$4^{2x+2} = 4^{3x-3}$

$2x + 2 = 3x - 3$

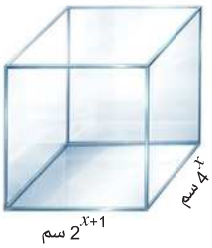
$3x - 2x = 2 + 3$

$x = 5$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

13 **حجوم :**

صندوق زجاجى مكعب طولا ضلعى قاعدته 2^{x+1} سم ، 4^x سم أوجد حجمه بوحدة السنتيمتر المكعب.



14 **حدائق :**

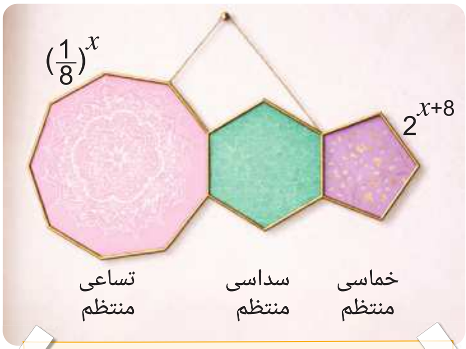
حوض زهور على شكل مستطيل أبعاده كما هو موضح بالشكل. احسب محيط الحوض.

تمنح الزهور الحدائق والمنازل مظهرًا أنيقًا يعكس الذوق والجمال

15 **ديكور :**

فى الشكل المقابل :

شكل ديكورى معلق على أحد الجدران يتكون من ثلاثة مضلعات منتظمة خماسى وسداسى وتساعى. فما قيمة x ؟



الاهتمام بالديكور يجعل المكان أكثر راحة وتنظيمًا وأناقة

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للمعادلات الأسية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

تفكير إبداعى

16 أوجد قيمة x فى كل مما يأتى :

① $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$

② $2 \times 3^{x+1} - 3^x = 5^{x+1} - 2 \times 5^x$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الوحدة الأولى

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الأولى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) أى مما يأتى يساوى $(a^2)^4 \times a^5$ ؟

(أ) a^{11} (ب) a^{13} (جـ) a^{40} (د) a^{30}

(2) إذا كان : $\frac{3^x \times 27^x}{81^x} = 2^{-2x}$ فما قيمة x ؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) −1

(3) إذا كان : $3^x = b$ فأى مما يأتى يساوى 9^{x+1} ؟

(أ) $27\,b^2$ (ب) $3\,b^2$ (جـ) $9\,b^2$ (د) $3\,b$

(4) إذا كان : $4^x = 8$ فما قيمة x ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

◂ **أكمل كلًا مما يأتى :**

(5) إذا كان : $7^{x+1} = 5^{x+1}$ فإن $x =$ ....

(6) ناتج : $\frac{(-2\,a^2)^3}{2\,a}$ فى أبسط صورة هو ....

(7) إذا كان : $5^{x-3} = 1$ فإن $2^x =$ ....

(8) إذا كان : $2^a + 2^a + 2^a = 24$ فإن $a =$ ....

◂ **أجب عن الأسئلة الآتية :**

(9) إذا كان : $2^x = 5$ فأوجد قيمة $8^x - 3 \times 2^{x+2}$

(10) اختصر لأبسط صورة : $\frac{4^x \times 9^{2-x}}{6^{2x}}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند $x = 1$

(11) أوجد فى R مجموعة حل المعادلة : $5^{x^2-4} = 125^x$

(12) أوجد قيمة m إذا كان : $3^{-2m+1} \times 9^{2m} = \frac{1}{27}$

نشاط الوحدة الأولى

المعادلات الأسية

◂ **الهدف من النشاط :**

فهم حل المعادلة الأسية وطرق حلها.

◂ **خطوات التنفيذ :**

بالتعاون مع أحد زملائك حاول القيام بالآتى :

1. استخدم أى وسيلة (كتاب - إنترنت - أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى ...) لصياغة مشكلة حياتية تعتمد على النمو الأسى (مثل : انتشار فيروس - تضاعف عدد المتابعين - تكاثر البكتيريا ...).
2. أعد صياغة المشكلة بأسلوبك، واكتب المعادلة التى تمثل المشكلة على الصورة $a^x = b$
3. استخدام ما تعلمته لحل المعادلة التى قمت بكتابتها، وتحقق من صحة حلك.
4. وضح خطوات حل المشكلة مع التأكيد على كيفية الاستفادة من قوانين الأسس فى حل المشكلة.

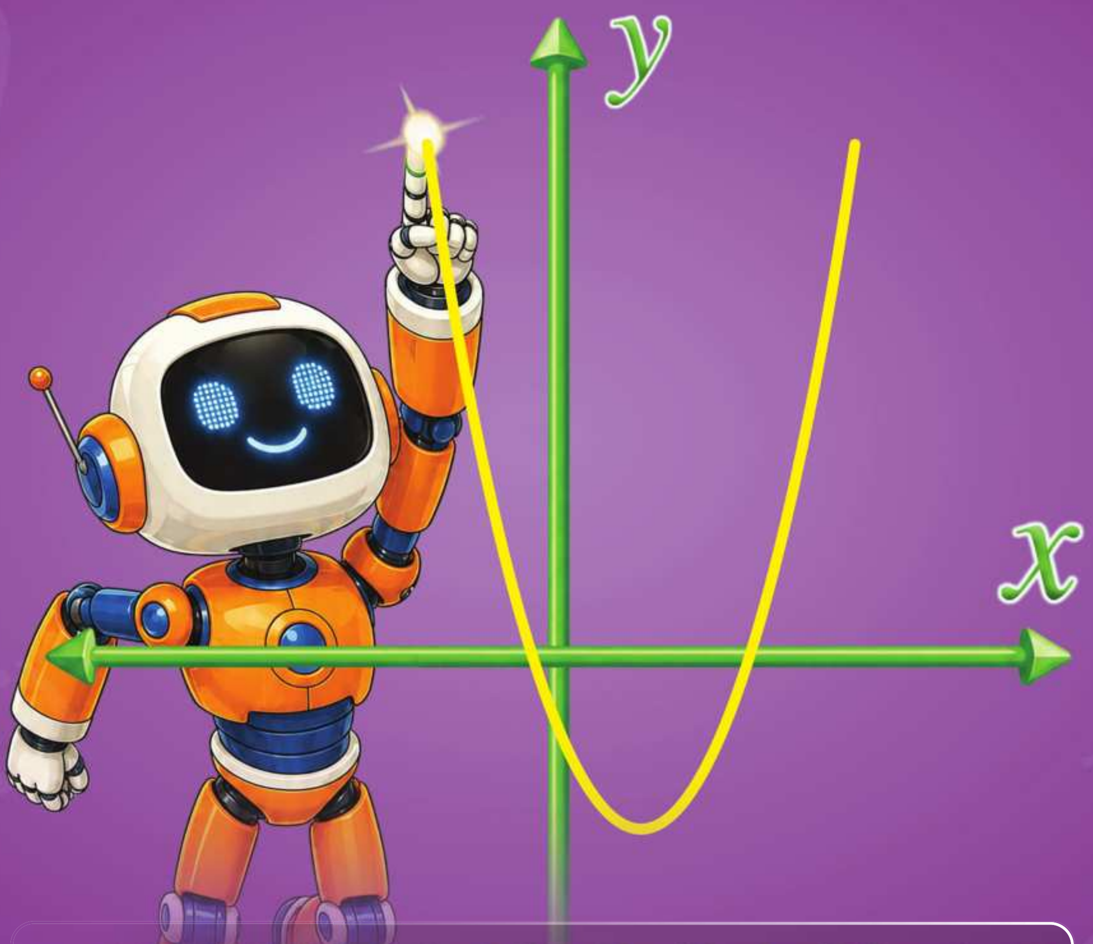
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة 2

الجبــر

دروس الوحدة

2-1 الدالة التربيعية
2-2 مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود
2-3 دوال الكسور الجبرية النسبية
2-4 المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية
2-5 العمليات على الكسور الجبرية النسبية



يسهم مفهوم دوال الكسور الجبرية النسبية فى الذكاء الاصطناعى من خلال تمثيل العلاقات غير الخطية بين البيانات، مما يساعد خوارزميات التعلم الآلى على تحسين دقة اتخاذ القرار وتحليل الأنماط الرياضية بصورة أكثر كفاءة.

◀ **فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين الكسور الجبرية النسبية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟**

القضايا والمهارات

- التفكير الرياضى.
- التفكير الناقد.
- الاستنتاج الرياضى.
- التفكير الإبداعى.

القيــم

- الوعى الطبى.
- العمل الجماعى.
- الوعى السياحى.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

2 - 1

الدالة التربيعية
(Quadratic Function)

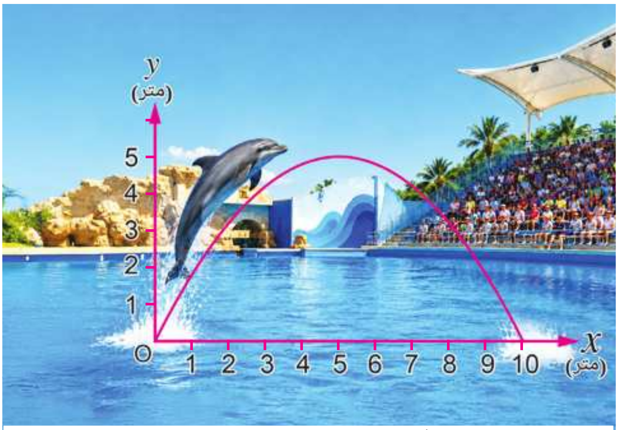
استعد !

الدلافين من أذكى الكائنات البحرية، وتتميز بقدرتها على السباحة السريعة والقفز العالى فوق سطح الماء. وتُعد عروض الدولفين من أكثر العروض البحرية جذبًا للزوار، حيث تُظهر الدلافين مهارات مدهشة فى القفز والحركات البهلوانية.

أثناء أحد العروض قفز الدولفين خارج الماء، وكان مساره يُعطى بالدالة f حيث :

$$f(x) = -0.2x^2 + 2x$$

ما أقصى ارتفاع يصل إليه الدولفين ؟



أحد عروض الدولفين

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على مفهوم الدالة التربيعية وخواصها وكيفية تمثيلها بيانيًا؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

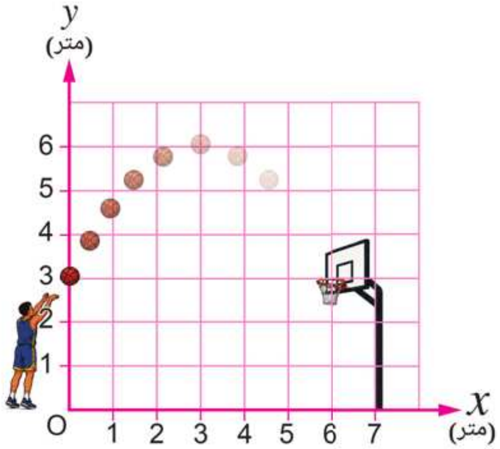
فكر وناقش !

فى الشكل المقابل :

إذا كانت الكرة تسير فى مسار منحنى الدالة f حيث :

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 6$$

فهل ستسقط الكرة داخل السلة ؟ ولماذا ؟ ناقش.



تعلم !

الدالة التربيعية

الدالة التربيعية هى دالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد، تُمثل بمنحنى يُسمى «قِطعًا مكافئًا»، وهو منحنى متماثل حول مستقيم رأسى يُسمى محور التماثل ويمر برأس المنحنى.

الصيغة القياسية للدالة التربيعية

الصيغة القياسية للدالة التربيعية f هى : $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

- الإحداثى x لرأس المنحنى : $x = \frac{-b}{2a}$
- الإحداثى y لرأس المنحنى : $y = f(\frac{-b}{2a})$
- رأس المنحنى : $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$
- المقطع y يساوى c

■ نواتج التعلم

- تعرف الصيغة القياسية للدالة التربيعية.
- تعرف صيغة الرأس للدالة التربيعية.
- تحدد رأس المنحنى ومحور تماثل الدالة التربيعية.
- تمثل الدالة التربيعية بيانيًا.
- توجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية.
- تستخدم التمثيل البيانى للدالة التربيعية فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- الدالة التربيعية Quadratic function
- قطع مكافئ Parabola
- القيمة العظمى Maximum value
- القيمة الصغرى Minimum value
- المقطع y y-intercept
- صيغة الرأس Vertex form

■ لاحظ أن

مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

■ لاحظ أن

المقطع y هو الإحداثى y لنقطة تقاطع المنحنى مع محور y، وللحصول على المقطع y بالدالة f حيث
$f(x) = ax^2 + bx + c$
نضع $x = 0$ فنجد أن $f(0) = c$

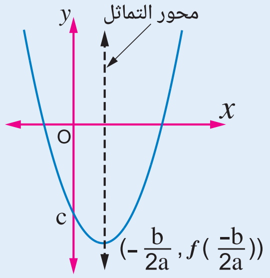
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التمثيل البيانى للدالة التربيعية فى الصيغة القياسية

إذا كان $a > 0$

المنحنى مفتوح لأعلى.

ويكون للدالة قيمة صغرى عند رأس المنحنى.

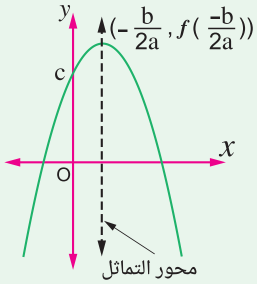


القيمة الصغرى للدالة هى $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

إذا كان $a < 0$

المنحنى مفتوح لأسفل.

ويكون للدالة قيمة عظمى عند رأس المنحنى.



القيمة العظمى للدالة هى $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

مثال 1

مثِّل بيانيًا الدالة f فى كل مما يأتى، موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة، ثم أوجد القيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
2. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

الحل

1. لرسم الدالة التربيعية f اتبع الخطوات الآتية :

- أوجد الإحداثى x لرأس المنحنى

$\because a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = -3$

$\therefore x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

- اختر عدة قيم حقيقية متماثلة حول الإحداثى x لرأس المنحنى :

$-2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

(1) ← الإحداثى x لرأس المنحنى

- أوجد الإحداثى y لرأس المنحنى والقيم المختارة كما بالجدول التالى :

x	$f(x) = x^2 - 2x - 3$	$(x , f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$	$(-2 , 5)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$	$(-1 , 0)$
0	$f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$	$(0 , -3)$
1	$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$	$(1 , -4)$ ← رأس المنحنى
2	$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$	$(2 , -3)$
3	$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$	$(3 , 0)$
4	$f(4) = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$	$(4 , 5)$

■ لاحظ أن

منحنى الدالة التربيعية متماثل حول محور التماثل وهو المستقيم الرأسى الذى يمر برأس المنحنى، والنقاط الواقعة على جهتى المنحنى المتقابلتين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا.

■ تقييم ذاتى (1)

مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(x) = 3x - x^2$ موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة ، ثم أوجد القيمة الصغرى أو العظمى للدالة.

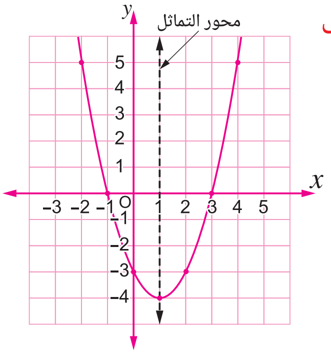
■ فكر وناقش

1. هل النقطة $(6 , 21)$ تقع على منحنى الدالة f حيث : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ؟
2. هل النقطة $(-1 , -10)$ تقع على منحنى الدالة f حيث : $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ؟

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

- عين النقط فى المستوى الإحداثى، ثم ارسم منحنى يمر بالنقط.

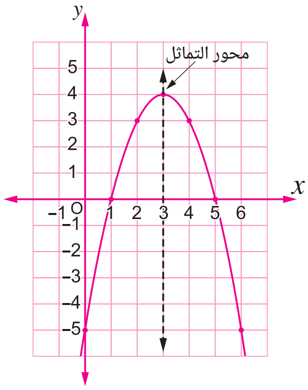
المنحنى مفتوح لأعلى ويكون للدالة قيمة صغرى، وهى 4 − (الإحداثى y لرأس المنحنى).



(2) اتبع نفس الخطوات السابقة على أن يتضمن التمثيل البيانى رأس المنحنى

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3$$

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	−5	(0 , −5)
1	0	(1 , 0)
2	3	(2 , 3)
3	4	(3 , 4) ← رأس المنحنى
4	3	(4 , 3)
5	0	(5 , 0)
6	−5	(6 , −5)



المنحنى مفتوح لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى وهى 4

مثال (2)

فى كل مما يأتى، أوجد رأس منحنى الدالة التربيعية، ونقطة تقاطع المنحنى مع محور y والقيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (2) $g(x) = -x^2 + 9$

الحل

(1) $\because a = 1 \;,\; b = -4 \;,\; c = 3$

$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

$\therefore f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$

∴ رأس المنحنى (2 , −1)

$\because c = 3$

∴ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y (0 , 3)

$\because a > 0$

∴ المنحنى مفتوح لأعلى

∴ القيمة الصغرى للدالة = −1

(2) $\because a = -1 \;,\; b = 0 \;,\; c = 9$

$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-(0)}{2(-1)} = 0$

$\therefore f(0) = -(0)^2 + 9 = 9$

∴ رأس المنحنى (0 , 9)

$\because c = 9$

∴ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y (0 , 9)

$\because a < 0$

∴ المنحنى مفتوح لأسفل

∴ القيمة العظمى للدالة = 9

■ توظيف التكنولوجيا

- يمكن استخدام برامج متعددة لتمثيل الدالة التربيعية ودراستها مثل برنامج GeoGebra
- حاول بنفسك استخدام برنامج GeoGebra لتمثيل الدالتين فى مثال (1)

■ تقييم ذاتى (2)

فى كل مما يأتى، أوجد رأس منحنى الدالة التربيعية، ونقطة تقاطع المنحنى مع محور y والقيمة الصغرى أو العظمى للدالة :

(1) $f(x) = x^2 - 2x$

(2) $g(x) = 1 - x^2$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

صيغة الرأس للدالة التربيعية

صيغة الرأس للدالة التربيعية f هى :

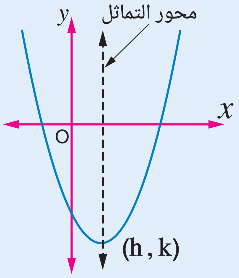
$f(x) = a\,(x - h)^2 + k$ حيث a , h , k أعداد حقيقية، $a \neq 0$ ‏ ‏ رأس المنحنى : (h , k)

التمثيل البيانى للدالة التربيعية فى صيغة الرأس

إذا كان $a > 0$

المنحنى مفتوح لأعلى.

ويكون للدالة قيمة صغرى عند رأس المنحنى.

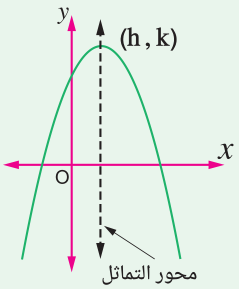


القيمة الصغرى للدالة هى $f\,(h) = k$

إذا كان $a < 0$

المنحنى مفتوح لأسفل.

ويكون للدالة قيمة عظمى عند رأس المنحنى.



القيمة العظمى للدالة هى $f\,(h) = k$

مثال 3

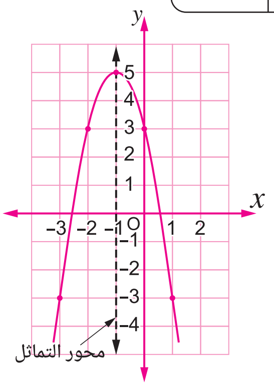
مثل بيانيًا الدالة f حيث $f\,(x) = 5 - 2\,(x + 1)^2$ موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة، ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

$\because f(x) = 5 - 2\,(x + 1)^2$ ‏ ‏ ‏ $\therefore f(x) = -\,2\,(x - (-\,1))^2 + 5$

$\therefore a = -\,2 \quad , \quad h = -\,1 \quad , \quad k = 5$

$\therefore$ رأس المنحنى $(-\,1 , 5)$

x	$f(x) = 5 - 2\,(x + 1)^2$	$(x , f(x))$
-3	$f(-3) = 5 - 2\,(-3 + 1)^2 = -3$	$(-3 , -3)$
-2	$f(-2) = 5 - 2\,(-2 + 1)^2 = 3$	$(-2 , 3)$
-1	$f(-1) = 5 - 2\,(-1 + 1)^2 = 5$	$(-1 , 5)$ ← رأس المنحنى
0	$f(0) = 5 - 2\,(0 + 1)^2 = 3$	$(0 , 3)$
1	$f(1) = 5 - 2\,(1 + 1)^2 = -3$	$(1 , -3)$



$\because a = -\,2$ ‏ ‏ ‏ $\therefore a < 0$

$\therefore$ المنحنى مفتوح لأسفل

ويكون للدالة قيمة عظمى هى 5

■ فكر وناقش

كتبت هاجر أن رأس منحنى الدالة f حيث $f(x) = (x + 2)^2 + 4$ هو النقطة $(2 , 4)$ هل ما كتبته هاجر صواب ؟ ناقش.

■ تقييم ذاتى 3

مثل بيانيًا الدالة f حيث $f\,(x) = (x - 2)^2 - 4$ موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة، ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 4

عين رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة f حيث :

$f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ ثم أوجد قيمة b إذا كانت النقطة (b , 9) تقع على المنحنى.

$\because f(x) = 2(x-3)^2 + 1 \qquad \therefore h = 3 \;,\; k = 1$

∴ رأس المنحنى (3 , 1)

$\because a = 2 \qquad \therefore a > 0$

∴ المنحنى مفتوح لأعلى. ∴ القيمة الصغرى للدالة = 1

∵ النقطة (b , 9) تقع على المنحنى.

$\therefore f(b) = 9 \qquad \therefore 2(b-3)^2 + 1 = 9$

$\therefore 2(b-3)^2 = 9 - 1 = 8 \qquad \therefore (b-3)^2 = \frac{8}{2} = 4$

$\therefore b - 3 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore b - 3 = 2$ أ $b - 3 = -2$

$\therefore b = 2 + 3 = 5 \qquad b = -2 + 3 = 1$

■ تقييم ذاتى (4)

عين رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة f حيث

$f(x) = -(x+1)^2 + 3$

وإذا كانت النقطة (m , – 1) تقع على المنحنى، فأوجد قيمة m

مثال 5

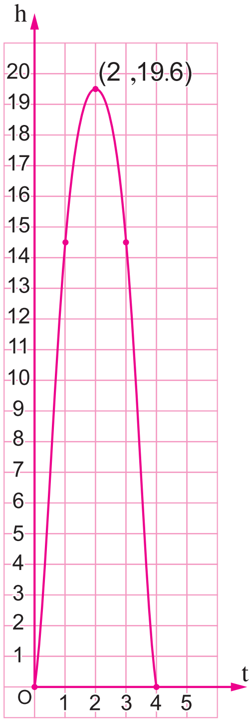
يركل لاعب كرة قدم الكرة لأعلى من سطح الأرض، فكان ارتفاعها عن سطح الأرض $h(t)$ بالمتر بعد (t) ثانية يتحدد بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ مثل العلاقة بيانيًا وأوجد أقصى ارتفاع والزمن الذى تصل فيه الكرة لأقصى ارتفاع.

$\because a = -4.9 \;,\; b = 19.6 \;,\; c = 0$

$\therefore \frac{-b}{2a} = \frac{-19.6}{2(-4.9)} = 2$

لاحظ عدم اختيار قيم سالبة للرمز t

t	$h(t)$	$(t , h(t))$
0	0	(0 , 0)
1	14.7	(1 , 14.7)
2	19.6	(2 , 19.6)
3	14.7	(3 , 14.7)
4	0	(4 , 0)



∵ رأس المنحنى (2 , 19.6)

∴ أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة = 19.6 متر

وزمن الوصول إلى أقصى ارتفاع = 2 ثانية.

■ تقييم ذاتى (5)

إذا كانت الدالة h حيث $h(x) = -0.5x^2 + 2x + 6$ تعبر عن العلاقة بين ارتفاع سيارة $h(x)$ بالمتر تسير على منحدر جبل والمسافة الأفقية x بالمتر. ارسم منحنى الدالة، واذكر أقصى ارتفاع تبدأ فيه السيارة بالنزول.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

نشاط تكنولوچى استخدام الآلة الحاسبة فى رسم الدالة التربيعية

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى تكوين الجدول المستخدم فى رسم الدالة التربيعية.

والخطوات التالية توضح كيفية تكوين جدول رسم الدالة f حيث $f(X) = X^2 - 2X - 3$ باستخدام الآلة الحاسبة.

1

يجب أولاً ضبط نظام الآلة على نظام (Table)، وذلك بالضغط على مفتاح MODE SETUP ثم اختيار نظام (Table)

2

أدخل البيانات : اكتب قاعدة الدالة السابقة، وذلك بالضغط على المفاتيح التالية :

3

اضغط على المفتاح = ثم فى بداية الفترة Start اكتب (−) 2 ثم اضغط =

4

اكتب فى نهاية الفترة END ? الرقم 4 ثم اضغط =

5

حدد طول الفترة STEP ? واختر الرقم 1 ثم اضغط =

وبذلك يتم إنشاء الجدول كما بالشاشة المقابلة

	x	F (X)
1	-2	5
2	-1	0
3	0	-3

، ويمكن التنقل باستخدام المفتاح إلى أعلى وإلى أسفل.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1. ما رأس المنحنى للدالة f حيث $f(X) = 2(X-3)^2 + 1$ ؟

(أ) $(2 , 3)$ (ب) $(2 , 1)$ (جـ) $(-3 , 1)$ (د) $(3 , 1)$

2. إذا كانت (h , k) هى رأس المنحنى للدالة f حيث $f(X) = 2X^2 - 8X + 7$، فما قيمة h ؟

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 6 (د) 8

3. ما نقطة تقاطع منحنى الدالة f حيث $f(X) = X^2 - 3X - 5$ مع المحور y ؟

(أ) $(0 , -5)$ (ب) $(0 , -3)$ (جـ) $(0 , 3)$ (د) $(0 , 5)$

4. ما القيمة الصغرى للدالة f حيث $f(X) = X^2 - 6X + 14$ ؟

(أ) -6 (ب) 5 (جـ) 9 (د) 14

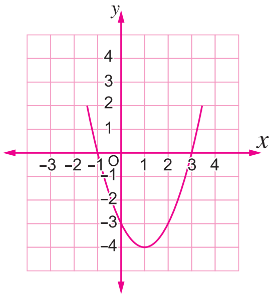
5. إذا كانت الدالة f حيث $f(X) = (a+4)X^3 + X^2 - 5X + 6$ دالة تربيعية، فما قيمة a ؟

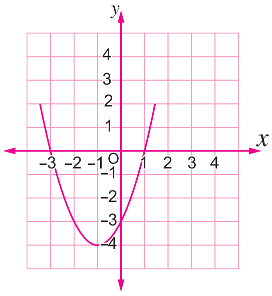
(أ) -4 (ب) -5 (جـ) 5 (د) 6

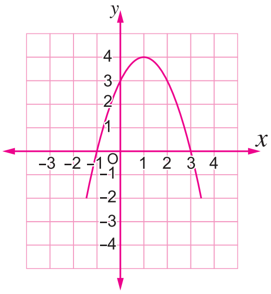
6. إذا كان -2 هو الإحداثى X لرأس منحنى الدالة f حيث $f(X) = aX^2 + 12X + 7$، فما قيمة a ؟

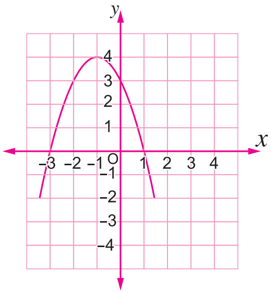
(أ) 3 (ب) 2 (جـ) -2 (د) -3

7. ما المنحنى الذى يمثل الدالة f حيث $f(X) = X^2 - 2X - 3$ ؟

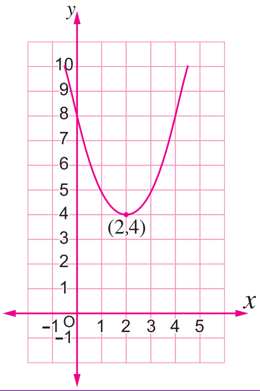

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

8. إذا كان المنحنى المقابل يمثل الدالة التربيعية f فما هى قاعدة الدالة f ؟



(أ) $f(X) = (X+2)^2 + 4$

(ب) $f(X) = (X+4)^2 + 2$

(جـ) $f(X) = (X-2)^2 + 4$

(د) $f(X) = (X-4)^2 + 2$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(9) مثل بيانيًا كلًّا مما يأتى، موضحًا على الرسم محور تماثل الدالة f، وأوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة :

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

(2) $f(x) = x^2 - 3$

(3) $f(x) = 2x - x^2$

(4) $f(x) = 6 + 2x - x^2$

(5) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

(6) $f(x) = (x + 3)^2 - 1$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(10) **رياضة :** ركل لاعب الكرة فى الهواء، ويمكن إيجاد ارتفاع الكرة عن سطح الأرض h بالمتر عند أى لحظة زمنية t بالثانية باستخدام الدالة h حيث $h(t) = -(t - 4)^2 + 16$

(1) ارسم الشكل البيانى للدالة لقيم $0 \le t \le 8$

(2) استخدم التمثيل البيانى لإيجاد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة، والزمن اللازم لتعود إلى الأرض.

(11) **رمى السهام :** يريد شخص إطلاق سهم فوق غصن شجرة أفقى يرتفع 15 مترًا عن سطح الأرض. يُعطى ارتفاع السهم عن سطح الأرض h بالأمتار بعد t ثانية من إطلاقه بالدالة h حيث $h(t) = -2t(t - 6)$

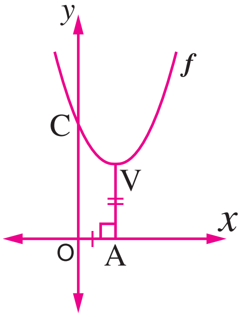
(1) ارسم الشكل البيانى لارتفاع السهم لقيم $0 \le t \le 6$

(2) استخدم التمثيل البيانى لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه السهم. هل السهم تجاوز الغصن ؟

تفكير إبداعى

(12) فى الشكل المقابل :

الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 2x + k + 1$ يمثلها بيانيًا منحنى رأسه V فإذا كان $VA = \frac{1}{2} OA$ فأوجد قيمة k وإحداثيى النقطة C



(13) إذا كانت f دالة حيث $f(x) = x^2 - 10x + k$ وكانت رأس المنحنى V تبعد عن نقطة الأصل بمقدار 13 وحدة طول فما قيم k الممكنة ؟

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للدالة التربيعية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الدرس

2 - 2

مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود
(Set of Real Zeros of Polynomial Functions)

▪ نواتج التعلم

- توجد مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود جبريًا.
- توجد مجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات حدود مرسومة بيانيًا.
- تستخدم الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود لحل بعض المشكلات الحياتية.

استعد !

العالم البريطانى ألكسندر فلمنج

يُعد العالم البريطانى ألكسندر فلمنج من أبرز العلماء فى تاريخ الطب ، حيث اكتشف عام 1928م أول مضاد حيوى وهو البنسلين.

تعتمد فاعلية المضادات الحيوية على الزمن، حيث يقل تركيزها فى جسم الإنسان بمرور الزمن بعد تناولها حتى يتلاشى.

يُعطى أحد المرضى جرعة من مضاد حيوى، ويُعبر عن كمية الدواء المتبقية فى دمه بالمليجرام بعد t ساعة بالدالة c حيث:

$$c\,(t) = 9 - \frac{1}{4}t^2$$

بعد كم ساعة يختفى تأثير هذا المضاد الحيوى من جسم المريض ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

إذا كانت $f\,(X) = 5\,X^3 - 20\,X$ أوجد $f\,(0)$ ، $f\,(2)$ ماذا تلاحظ ؟

وهل يمكنك إيجاد قيمة أخرى تكون عندها $f\,(X) = 0$ ؟ ناقش.

تعلم !

الدالة كثيرة الحدود

الدالة $f: R \longrightarrow R$ والتى تكون على الشكل :

$$f\,(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ أعداد حقيقية وجميع أسس المتغير X أعداد صحيحة موجبة، $a_n \neq 0$ تكون دالة كثيرة حدود فى متغير واحد من الدرجة n.

أمثلة لدوال كثيرات الحدود :

- $f\,(X) = X^3 - \sqrt{2}\,X + 1$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية).
- $f\,(X) = 2\,X - X^2$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية).
- $f\,(X) = 9 - 4\,X$ كثيرة حدود من الدرجة الأولى (دالة خطية).
- $f\,(X) = 7$ كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (دالة ثابتة).
- $f\,(X) = 0$ كثيرة الحدود الصفرية وليس لها درجة.

▪ المفردات

- دالة Function
- دالة كثيرة حدود Polynomial function
- أصفار الدالة Zeros of function
- حل المعادلة Solution of equation

▪ فكر مع زملائك

هل كل من الدوال الآتية كثيرة حدود أم لا ؟

1. $f(X) = X^4$
2. $f(X) = 4^X$
3. $f(X) = \frac{1}{X}$
4. $f(X) = -2\,X^{-3}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مجموعة الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة الحدود

الأصفار الحقيقية لدالة هى قيم x الحقيقية التى تجعل $f(x)$ تساوى الصفر

أى أن : مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f هى $\{x : f(x) = 0 , x \in R\}$

فمثلًا : إذا كانت $f(x) = (x - 5)^2$

فإن 5 يكون صفرًا للدالة f لأن : $f(5) = (5 - 5)^2 = 0$

لإيجاد الأصفار الحقيقية للدالة f نحل المعادلة $f(x) = 0$

مثال 1

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلى :

1. $f(x) = 3x - 6$
2. $p(x) = x^2 - 25$
3. $g(x) = x^2 - x - 12$
4. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$
5. $p(x) = 3x^2 + 12$
6. $g(x) = 27x^3 + 125$

الحل

1. بوضع $3x - 6 = 0$

$\therefore x = \frac{6}{3} = 2$

∴ مجموعة أصفار الدالة f = $\{2\}$

2. بوضع $x^2 - 25 = 0$

$\therefore x^2 = 25 \qquad \therefore x = \pm 5$

∴ مجموعة أصفار الدالة p = $\{-5 , 5\}$

3. بوضع $x^2 - x - 12 = 0$

$\therefore (x + 3)(x - 4) = 0$

$\therefore x = -3$ أ، $x = 4$

∴ مجموعة أصفار الدالة g = $\{-3 , 4\}$

4. بوضع $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$

$\therefore x(x^2 + 2x - 15) = 0$

$\therefore x(x + 5)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 0$ أ، $x = -5$ أ، $x = 3$

∴ مجموعة أصفار الدالة f = $\{0 , -5 , 3\}$

5. بوضع $3x^2 + 12 = 0$

$\therefore 3x^2 = -12$

$\therefore x^2 = -4$

$\therefore x = \pm\sqrt{-4}$

ليس لها جذور حقيقية

∴ مجموعة أصفار الدالة p هى $\varnothing$

6. بوضع $27x^3 + 125 = 0$

$\therefore x^3 = \frac{-125}{27}$

$\therefore x = \sqrt[3]{\frac{-125}{27}} = \frac{-5}{3}$

∴ مجموعة أصفار الدالة g = $\left\{\frac{-5}{3}\right\}$

■ ملاحظة

إذا كانت f دالة كثيرة حدود وكان a عددًا حقيقيًا بحيث $f(a) = 0$ فإن :

- a هو أحد أصفار كثيرة الحدود f
- $x = a$ هو أحد حلول المعادلة $f(x) = 0$
- $(x - a)$ هو أحد عوامل $f(x)$

■ تقييم ذاتى 1

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلى :

1. $p(x) = 5x - 10$
2. $g(x) = 2x^2 - 18$
3. $f(x) = x^3 - 8$
4. $g(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

■ لاحظ أن

- إذا كانت f حيث $f(x) = a$، a عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر (دالة كثيرة حدود ثابتة) فإن مجموعة أصفار الدالة f هى $\varnothing$
- إذا كانت f حيث $f(x) = 0$ (دالة كثيرة حدود صفرية) فإن مجموعة أصفار الدالة f هى R

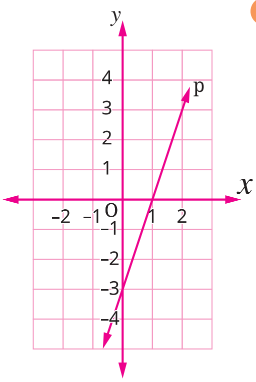
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

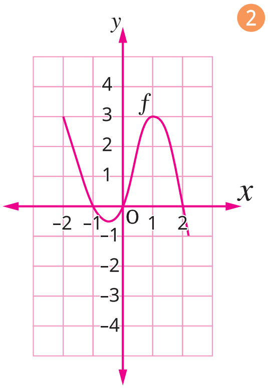
إيجاد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود مرسومة بيانيًا

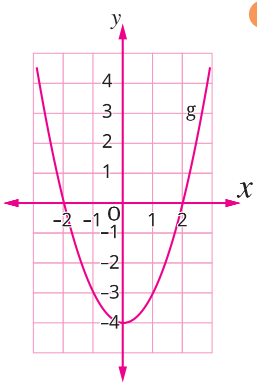
إذا قطع منحنى دالة كثيرة حدود f محور X فى النقطة $(a, 0)$ فإن a يكون صفرًا للدالة f

مثال 2

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل من الدوال الممثلة بالمنحنيات التالية :

1


2


3


1 ∵ منحنى الدالة p يقطع محور X عند $X = 1$

∴ مجموعة أصفار الدالة p هى $\{1\}$

2 ∵ منحنى الدالة f يقطع محور X عند $X = -1$ ، $X = 0$ ، $X = 2$

∴ مجموعة أصفار الدالة f هى $\{-1 , 0 , 2\}$

3 ∵ منحنى الدالة g يقطع محور X عند $X = -2$ ، $X = 2$

∴ مجموعة أصفار الدالة g هى $\{-2 , 2\}$

مثال 3

إذا كان -3 أحد أصفار الدالة كثيرة الحدود f حيث $f(X) = 2X^2 + bX + 3$

أوجد قيمة b ثم أوجد $f(4)$

∵ -3 أحد أصفار الدالة f حيث $f(X) = 2X^2 + bX + 3$

$\therefore f(-3) = 0$

$\therefore 2(-3)^2 + b(-3) + 3 = 0$

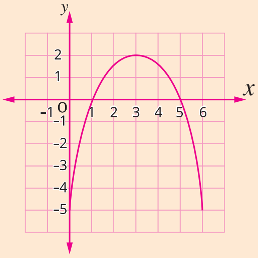
$\therefore -3b = -21$ $\qquad \therefore b = 7$

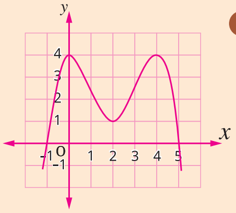
$\therefore f(X) = 2X^2 + 7X + 3$

$\therefore f(4) = 2(4)^2 + 7(4) + 3 = 63$

■ تقييم ذاتى 2

أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل من الدالتين الممثلتين بالمنحنيين الآتيين :

1


2


■ لاحظ أن

عدد الأصفار الحقيقية المختلفة لدالة كثيرة حدود هو عدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة مع محور X

■ تقييم ذاتى 3

إذا كان 0 ، 4 همـا صفـرا الدالة كثيرة الحدود f حيث :

$f(X) = X^2 + aX + b$

أوجد قيمة كل من a ، b

ثم أوجد $f(-2)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقييم الدرس

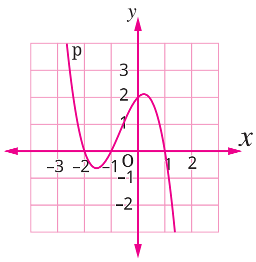
أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ما مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = -3x$ ؟
(أ) $\{3\}$ (ب) $\{-3\}$
(جـ) $\{0\}$ (د) $R - \{0\}$

② ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة p حيث $p(x) = x^2 + 25$ ؟
(أ) $\{5\}$ (ب) $\{5, -5\}$
(جـ) $\{0\}$ (د) $\varnothing$

③ ما الأصفار الحقيقية للدالة p الموضحة فى الشكل البيانى؟



(أ) 2 ، 0
(ب) 1 ، 0 ، -1
(جـ) 1 ، 2 ، -2
(د) 1 ، -1 ، -2

④ أى مما يلى تكون مجموعة أصفارها $\{-2, 0\}$ ؟
(أ) $f(x) = x^2 - 2x$
(ب) $f(x) = x^3 + 8$
(جـ) $f(x) = x^2 + 2x$
(د) $f(x) = x^2 - 4$

⑤ ما مجموعة أصفار الدالة g حيث $g(x) = 3$ ؟
(أ) $\{3\}$ (ب) $\{0\}$
(جـ) $\varnothing$ (د) R

⑥ إذا كان $(x + 3)$ أحد عوامل $p(x)$ ، فأى مما يلى صحيح ؟
(أ) $p(0) = 3$ (ب) $p(0) = -3$
(جـ) $p(3) = 0$ (د) $p(-3) = 0$

⑦ إذا كان 1 أحد أصفار الدالة p، فأى مما يلى صحيح ؟
(أ) $p(0) = 1$ (ب) $p(0) = -1$
(جـ) $p(1) = 0$ (د) $p(-1) = 0$

⑧ إذا كانت $\{-3, 3\}$ هى مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = x^2 + k$ فما قيمة k ؟
(أ) ± 3 (ب) 9
(جـ) -9 (د) ± 9

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلى :

① $f(x) = 2x - 16$
② $f(x) = x^2 - 36$
③ $g(x) = 4x^2 + 9$
④ $p(x) = x$
⑤ $p(x) = x^3 - x$
⑥ $p(x) = x^2 - 3x + 2$
⑦ $p(x) = 3x^2 - 12x$
⑧ $p(x) = x^3 + 64$
⑨ $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$

⑩ إذا كان -2 أحد أصفار الدالة f حيث $f(x) = x^2 + bx - 14$ ، فأوجد قيمة b

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(11) إذا كان 7 – أحد أصفار الدالة p حيث $p(x) = 2x^2 + 6x + c$ ، فأوجد قيمة c ، ومجموعة أصفار p

(12) إذا كان 3 أحد أصفار الدالة g حيث $g(x) = x^2 - (k-5)x - 5k$ ، فأوجد قيمة k ، ثم أوجد مجموعة أصفار g

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) **سياحة :** إذا كان عدد المشاهدات اليومية لأحد الأفلام القصيرة للترويج للسياحة فى مصر يتبع الدالة :

$$p(t) = -3t^2 + 18t + 165$$

حيث t عدد الأيام منذ عرض الفيلم.

فى أى يوم يصل عدد المشاهدات صفرًا ؟

تُعد السياحة من أهم ركائز الاقتصاد فى مصر، فهى تعد مصدرًا مهمًا للعملة الأجنبية.

تفكير إبداعى

(14) **أوجد مجموعة الأصفار الحقيقية لكل مما يلى :**

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

(2) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

(3) $g(x) = x^2 - 2x - 6$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لمجموعة الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود ؟ ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس 3 - 2

دوال الكسور الجبرية النسبية
(Rational Algebraic Functions)

استعد !

يُعد طريق الجلالة بمصر أحد الإنجازات الهندسية التى أبهرت العالم، فقد تم شقه بين الجبال والصخور بطول 82 كيلو متر يبدأ الطريق بعد نهاية طريق القطامية حتى الزعفرانة.

سيارة تقطع مسافة قدرها $(x^2+8x+12)$ كيلو متر فى زمن قدره (x^2-x-6) ساعة، أوجد سرعة السيارة فى أبسط صورة، علمًا بأن : السرعة = المسافة ÷ الزمن.

طريق الجلالة

فى هذا الدرس سوف تتعلم دوال الكسور الجبرية النسبية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

ما قيم x التى تجعل الدالة f غير معرفة حيث $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ ؟

قام كل من حسن وحنان وأمجد بالإجابة عن السؤال السابق، وكانت إجاباتهم كالتالى :

حسن	حنان	أمجد
f غير معرفة عند $x=9$	f غير معرفة عند $x=\pm 3$	f معرفة عند جميع قيم x الحقيقية

أى منهم إجابته صحيحة ؟ ناقش.

تعلم !

الكسور الجبرية النسبية

الكسر الجبرى النسبى هو نسبة بين كثيرتى حدود، ويكون معرفًا عند جميع الأعداد الحقيقية ما عدا مجموعة أصفار المقام.

أى أنه : إذا كانت $q(x)$ ، $p(x)$ كثيرتى حدود فإن :

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ يُسمى كسرًا جبريًا نسبيًا حيث $q(x) \neq 0$

فمثلًا :

$\dfrac{x^2-1}{x+2}$ كسر جبرى نسبى معرف عند جميع الأعداد الحقيقية ما عدا عند $x=-2$

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم دالة الكسر الجبرى النسبى.
- تعرف مجال دالة الكسر الجبرى النسبى.
- تبسِّط الكسر الجبرى النسبى لأبسط صورة.
- تعرف مجموعة أصفار دالة الكسر الجبرى النسبى.
- تستخدم دوال الكسور الجبرية النسبية لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- كسر جبرى نسبى Rational algebraic fraction
- دالة كسر جبرى نسبى Rational algebraic function
- مجال Domain
- أصفار الدالة Zeros of function

■ **لاحظ أن :**

الكسر الجبرى بصفة عامة قد يحتوى كل من بسطه ومقامه على جذور أو أسس كسرية أو كثيرات حدود، أما الكسر الجبرى النسبى يحتوى كل من بسطه ومقامه على كثيرات حدود فقط.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال (1)

أوجد مجموعة قيم x التى تجعل الكسر الجبرى النسبى غير معرف فى كل مما يأتى :

(1) $\frac{x-3}{x^2-3x+2}$ (2) $\frac{x+4}{x^2+16}$

(1) بوضع $x^2-3x+2=0$

$\therefore (x-2)(x-1)=0$

$\therefore x-2=0$ أ، $x-1=0$

$\therefore x=2$ | $x=1$

$\therefore$ مجموعة أصفار المقام = $\{1, 2\}$

$\therefore$ الكسر غير معرف عندما $x \in \{1, 2\}$

(2) بوضع $x^2+16=0$

$\therefore x^2=-16$

$\therefore x=\pm\sqrt{-16} \notin R$

$\therefore$ مجموعة أصفار المقام = $\varnothing$

$\therefore$ مجموعة قيم x التى تجعل الكسر غير معرف = $\varnothing$

دوال الكسور الجبرية النسبية

إذا كان $\frac{p(x)}{q(x)}$ كسرًا جبريًا نسبيًا فإن :

الدالة f حيث $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ دالة كسر جبرى نسبى مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ما عدا مجموعة أصفار المقام، ويُرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f

أى أن : $D_f = R - \{x : q(x)=0\}$

مثال (2)

عين مجال كل من دوال الكسور الجبرية النسبية الآتية :

(1) الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ ثم أوجد إن أمكن $f(5)$ ، $f(-5)$

(2) الدالة g حيث $g(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}$ ثم أوجد إن أمكن $g(0)$ ، $g(-3)$

(1) بوضع $x-5=0$

$\therefore x=5$

$\therefore$ مجموعة أصفار المقام = $\{5\}$

$\therefore D_f = R-\{5\}$

$\therefore f(5)$ غير معرفة لأن : $5 \notin D_f$

$\because -5 \in D_f$

$\therefore f(-5)=\frac{(-5)^2-25}{(-5)-5}=\frac{0}{-10}=0$

■ تقييم ذاتى (1)

أوجد مجموعة قيم x التى تجعل الكسر الجبرى النسبى غير معرف فى كل مما يأتى :

(1) $\frac{2x-6}{x-3}$ (2) $\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$

■ التحقق من صحة الحل

يمكنك التحقق من صحة الحل فى جزئية (1) كما يلى :

بالتعويض عن قيمة $x=1$:

$\therefore \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{1-3}{1^2-3(1)+2} = \frac{-2}{0}$ (غير معرف)

تحقق بنفسك بالتعويض عن قيمة $x=2$

■ ناقش

هل تعتبر الدوال كثيرات الحدود دوال كسور جبرية نسبية أم لا ؟

■ تقييم ذاتى (2)

عين مجال الدالة r حيث :

$r(x)=\frac{2x+1}{x^2-4x-5}$

ثم أوجد إن أمكن :

$r(-1)$ ، $r(0)$ ، $r(5)$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

■ ناقش

ما هو مجال دالة الكسر الجبرى النسبى إذا كانت مجموعة أصفار المقام تساوى $\varnothing$ ؟

(2) بوضع $x^2 + x - 6 = 0$

$\therefore (x-2)(x+3) = 0$

$\therefore x - 2 = 0$ أ، $x + 3 = 0$

$\therefore x = 2$ | $x = -3$

$\therefore$ مجموعة أصفار المقام $= \{-3\ ,2\}$

$\therefore D_g = R - \{-3\ ,2\}$

$\therefore g(-3)$ غير معرفة لأن : $-3 \notin D_g$

$\because 0 \in D_g$ $\qquad \therefore g(0) = \dfrac{(0)^2 - 2(0)}{(0)^2 + (0) - 6} = 0$

تبسيط دوال الكسور الجبرية النسبية

يمكن تبسيط دالة الكسر الجبرى النسبى بحذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام، مع احتفاظ الدالة بمجالها قبل الحذف.

مثال (3)

ضع الدالة f فى أبسط صورة حيث $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6}$ موضحًا مجالها، ثم أوجد إن أمكن $f(3)$ ، $f(2)$ ، $f(1)$

■ تقييم ذاتى (3)

ضع الدالة f فى أبسط صورة حيث

$f(x) = \dfrac{x^3 - 64}{x^2 - 3x - 4}$

موضحًا مجالها ، ثم أوجد إن أمكن $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f(4)$

– حلل كلًا من البسط والمقام : $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-2)(x-3)}$

– أوجد مجموعة أصفار المقام بوضع المقام = صفر

$\because (x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x - 2 = 0$ أ، $x - 3 = 0$

$\therefore x = 2$ | $x = 3$

$\therefore$ مجموعة أصفار المقام $= \{2\ ,3\}$

– أوجد مجال الدالة f

$D_f = R - \{2\ ,3\}$

– احذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام لتبسيط الدالة f

$\because f(x) = \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+5)}{(x-2)\cancel{(x-3)}}$ $\qquad \therefore \boxed{f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}}$

$\therefore f(1) = \dfrac{1+5}{1-2} = -6$

$\because 2 \notin D_f\ , 3 \notin D_f$

$\therefore$ لا يمكن تعيين قيمتى $f(3)$ ، $f(2)$ بالدالة f

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أصفار دالة الكسر الجبرى النسبى

إذا كانت f دالة كسر جبرى نسبى حيث $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

فإن مجموعة أصفار الدالة f هى مجموعة أصفار البسط $p(x)$ فرق مجموعة أصفار المقام $q(x)$

أى أن : مجموعة أصفار الدالة $f = \{x : p(x) = 0 , q(x) \neq 0\}$

■ تذكر أن

مجموعة أصفار الدالة f هى قيم x التى تجعل $f(x) = 0$

مثال 4

أوجد مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6}$

$\because f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6}$ $\quad \therefore f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+2)}$

$\therefore$ مجموعة أصفار البسط $= \{3 , 4\}$

مجموعة أصفار المقام $= \{3 , -2\}$

$\therefore$ مجموعة أصفار الدالة f هى :

$\{3 , 4\} - \{3 , -2\} = \{4\}$

■ تحقق من صحة الحل

عوض عن قيمة $x = 4$ فى $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 6}$ تجد أن $f(4) = 0$

■ تقييم ذاتى 4

أوجد مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 + 2x^2}$

مثال 5

1 إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $f(x) = 5$ فى R

2 إذا كانت : $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $g(x) = 4$ فى R

1

$\because f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$\therefore f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$\therefore D_f = R - \{2\}$

$\therefore f(x) = x + 2$

$\because f(x) = 5$

$\therefore x + 2 = 5$

$\therefore x = 5 - 2 = 3 \in D_f$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{3\}$

2

$\because g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

$\therefore g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)}$

$\therefore D_g = R - \{1\}$

$\therefore g(x) = x + 3$

$\because g(x) = 4$

$\therefore x + 3 = 4$

$\therefore x = 4 - 3 = 1 \notin D_g$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$

■ تقييم ذاتى 5

1 إذا كانت : $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $f(x) = 3$ فى R

2 إذا كانت : $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $g(x) = -1$ فى R

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من القيم الآتية تجعل الكسر الجبرى $\frac{x-1}{x+2}$ غير معرف ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) -1 (د) -2

② أى من القيم الآتية تجعل الدالة f حيث $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ تساوى الصفر ؟

(أ) -3 (ب) 3 (جـ) -2 (د) 2

③ ما مجال الدالة g حيث $g(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2+4}$ ؟

(أ) $R-\{2\}$ (ب) $R-\{-2\}$

(جـ) $R-\{-4\}$ (د) R

④ ما مجال الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2-25}{7}$ ؟

(أ) R (ب) $\{7\}$

(جـ) $R-\{7\}$ (د) $\{-5,5\}$

⑤ ما مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}$ ؟

(أ) $\{0\}$ (ب) $\{2\}$ (جـ) $\{-2\}$ (د) $\{2,0\}$

⑥ إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x)=\frac{2x}{x-a}$ يساوى $R-\{-2\}$ فما قيمة a ؟

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 2 (د) -2

⑦ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2-x+a}{x+2}$ هى $\{3\}$ فما قيمة a ؟

(أ) -6 (ب) -2 (جـ) 3 (د) 6

◂ اكتشف الخطأ :

⑧ قام كل من أمل ومجدى بتبسيط الدالة f إلى أبسط صورة حيث

$$f(x)=\frac{4x+12}{x^2-x-12}$$

وإيجاد مجالها.

أى من الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

حل أمل :

$\because f(x)=\frac{4x+12}{x^2-x-12}$

$\therefore f(x)=\frac{4(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

$\therefore D_f=R-\{-3,4\}$

$\therefore f(x)=\frac{4}{x-4}$

حل مجدى :

$\because f(x)=\frac{4x+12}{x^2-x-12}$

$\therefore f(x)=\frac{4(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

$\therefore f(x)=\frac{4}{x-4}$

$\therefore D_f=R-\{4\}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ أوجد فى أبسط صورة الدالة f موضحًا مجالها فى كل مما يأتى :

① $f(x)=\frac{2x-5}{5-2x}$

② $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

③ $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{3x-3}$

④ $f(x)=\frac{6x+12}{2x^2+7x+6}$

⑤ $f(x)=\frac{16+16x+3x^2}{x^2-3x-28}$

⑥ $f(x)=\frac{4x^2-8x-5}{15-x-2x^2}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑩ **أوجد مجموعة أصفار الدالة f فى كل مما يأتى :**

① $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

② $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$

③ $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-x-6}$

④ $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6}$

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$

⑥ $f(x) = \dfrac{4x^2-4x-3}{9-3x-2x^2}$

⑪ إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x+6}{x^2-ax+36}$ هو $R-\{6\}$ فأوجد قيمة a

⑫ إذا كانت : $f(x) = \dfrac{x+a}{x-b}$ ، وكانت $f(2)$ غير معرفة ، $f(5) = 2$ فأوجد قيمة كل من a ، b

⑬ إذا كانت : $f(x) = \dfrac{2x^2+7x-15}{2x-3}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $f(x) = 10$ فى R

⑭ إذا كانت : $g(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة $g(x) = -1$ حيث $x \in R$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑮ **زراعة :** فى الشكل المقابل، حوضان للزهور على شكل مستطيل لهما نفس المساحة. عبر عن k كدالة فى x وضعها فى أبسط صورة، ثم أوجد :

① قيمة k عند $x = 2$

② قيمة x عند $k = 4$

م $(2x+4)$

م $2x$

k م

م $(x+2)$

تفكير إبداعى

⑯ **سؤال مفتوح :** اكتب دالة كسر جبرى نسبى مجالها $R-\{4, -2\}$

⑰ إذا كان حجم صندوق A هو (x^3-2x^2-3x) وحدة مكعبة
، وكان حجم صندوق B هو (x^3+2x^2-15x) وحدة مكعبة،
فما نسبة حجم الصندوق A إلى حجم الصندوق B فى أبسط صورة ؟
وهل يمكن أن تكون النسبة بين حجميهما $\dfrac{1}{2}$ ؟

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لدوال الكسور الجبرية النسبية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

4 - 2

المجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية

(Common Domain and Equivalent Rational Algebraic Functions)

▪ نواتج التعلم

- توجد المجال المشترك لدالتين أو أكثر من دوال الكسور الجبرية النسبية.
- تعرف شروط تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية.

▪ المفردات

- المجال المشترك Common domain
- الدوال المتساوية Equivalent functions

▪ ناقش

إذا كانت f ، g دالتين من دوال الكسور الجبرية النسبية وكان :

مجال $f = R - \{1 , 2\}$

، مجال $g = R - \{2 , 3\}$

فأى العبارتين الآتيتين صحيحة:

1. المجال المشترك $= R - \{2\}$
2. المجال المشترك $= R - \{1 , 2 , 3\}$

استعد !

إذا كان متوسط أعمار طالبات إحدى مدارس البنات يساوى $\left(\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 8x + 15}\right)$ سنة. وكان متوسط أعمار طلاب إحدى مدارس البنين يساوى $\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}\right)$ سنة. هل المدرستان لهما نفس متوسط الأعمار لجميع قيم x ؟

فى هذا الدرس، سـوف تتعلم مفهوم المجال المشـترك لدوال الكسـور الجبرية النسبية، وشروط تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

إذا كانت : $g(x) = x + 2$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

فهل $f(2) = g(2)$ ؟ ولماذا ؟

تعلم !

المجال المشترك لدوال الكسور الجبرية النسبية

المجال المشترك لدالتين هو تقاطع مجاليهما، أى مجموعة القيم التى تكون فيها الدالتان معرفتين معًا.

لأى دالتين f، g من دوال الكسور الجبرية النسبية إذا كان :

مجال f هو $R - Z_1$ حيث Z_1 مجموعة أصفار مقام $f(x)$

ومجال g هو $R - Z_2$ حيث Z_2 مجموعة أصفار مقام $g(x)$

فإن : المجال المشترك للدالتين f ، g $= D_f \cap D_g = R - (Z_1 \cup Z_2)$

أى أن

المجال المشـترك لدالتين من دوال الكسـور الجبرية النسـبية يساوى جميع الأعداد الحقيقية ما عدا مجموعة أصفار المقامين.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 1

أوجد المجال المشترك للدالتين f , g حيث :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6} , g(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

بوضع $x^2-x-6=0$

$\therefore (x-3)(x+2)=0$

$\therefore x-3=0$ أو $x+2=0$

$\therefore x=3$ | $x=-2$

$\therefore D_f=R-\{-2,3\}$

بوضع $x^2-5x+6=0$

$\therefore (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x-2=0$ أو $x-3=0$

$\therefore x=2$ | $x=3$

$\therefore D_g=R-\{2,3\}$

$\therefore$ المجال المشترك $= R-\{-2,2,3\}$

مثال 2

أوجد المجال المشترك للدوال f , g , p حيث :

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1} , g(x)=\frac{5}{x^2+4} , p(x)=\frac{2x^2-7x+6}{2x+3}$$

بوضع $x^2-1=0$

$\therefore (x-1)(x+1)=0$

$\therefore x-1=0$ أو $x+1=0$

$\therefore x=1$ | $x=-1$

$\therefore D_f=R-\{-1,1\}$

بوضع $x^2+4=0$

$\therefore x^2=-4$ $\qquad \therefore x=\pm\sqrt{-4}\notin R$

$\therefore D_g=R$

بوضع $2x+3=0$

$\therefore 2x=-3$ $\qquad \therefore x=\frac{-3}{2}$

$\therefore D_p=R-\{\frac{-3}{2}\}$

$\therefore$ المجال المشترك للدوال f , g , p $= R-\{\frac{-3}{2},-1,1\}$

■ تقييم ذاتى 1

أوجد المجال المشترك للدالتين f , g حيث :

$$f(x)=\frac{x^2+7x}{x^2-49} ,$$

$$g(x)=\frac{x-7}{x^2-10x+21}$$

■ تقييم ذاتى 2

أوجد المجال المشترك للدوال f , g , p حيث :

$$f(x)=\frac{x+4}{2} ,$$

$$g(x)=\frac{2}{x^2-4} ,$$

$$p(x)=\frac{7x}{x^2-2x}$$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تساوى دوال الكسور الجبرية النسبية

تتساوى دالتان من دوال الكسور الجبرية النسبية إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

1 تطابق المجال (أى الدالتان لهما نفس المجال تمامًا).

2 تكافؤ القاعدة (أى عند تبسيط القاعدتين إلى أبسط صورة، تكونان متطابقتين).

أى أن :

لأى دالتين f , g من دوال الكسور الجبرية النسبية تكون $f = g$ إذا تحقق الشرطان :

1 $D_f = D_g$ 2 $f(x) = g(x)$ لكل $x \in (D_f \cap D_g)$

مثال 3

إذا كانت : $g(x) = \dfrac{4x}{4x - 12}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$ فأثبت أن : $f = g$

$\because f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{x(x-3)}{(x-3)(x-3)}$

$\therefore D_f = R - \{3\}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

$\because g(x) = \dfrac{4x}{4x - 12} = \dfrac{4x}{4(x-3)}$

$\therefore D_g = R - \{3\}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

$\therefore$ مجال f = مجال g ، $f(x) = g(x)$ لكل $x \in R - \{3\}$

$\therefore f = g$

مثال 4

إذا كانت : $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$

فأثبت أن : $f(x) = g(x)$ لكل x تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين f , g وأوجد هذا المجال.

$\because f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \dfrac{x}{x(x-2)}$

$\therefore D_f = R - \{0, 2\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$\because g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$,

$\therefore D_g = R - \{2\}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$\therefore$ المجال المشترك للدالتين f , g = $R - \{0, 2\}$

$\therefore f(x) = g(x)$ لكل x تنتمى إلى المجال المشترك $R - \{0, 2\}$

■ لاحظ أن :

مجال f ≠ مجال g

■ تقييم ذاتى 3

إذا كانت :

$f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$,

$g(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2}$

فأثبت أن : $f = g$

■ تقييم ذاتى 4

إذا كانت :

$f(x) = \dfrac{4}{4x - 20}$,

$g(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 25}$

فأثبت أن :

$f(x) = g(x)$

لكل x تنتمى إلى المجال المشترك، وأوجد هذا المجال.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) ما المجال المشترك للدالتين f , g إذا كانت : $g(x) = \frac{-1}{x-2}$, $f(x) = \frac{3}{x+2}$ ؟

(أ) $R - \{2\}$ (ب) $R - \{-2\}$ (جـ) $R - \{-2 , 2\}$ (د) R

2) إذا كانت : $g(x) = \frac{1}{x-3}$, $f(x) = \frac{x}{x(x-3)}$

فأى من المجموعات الآتية تعبر عن مجموعة قيم x التى عندها $f(x) = g(x)$ ؟

(أ) $R - \{3\}$ (ب) $R - \{0\}$ (جـ) $R - \{0 , 3\}$ (د) R

3) إذا كانت : $g(x) = \frac{-2}{x+3}$, $f(x) = \frac{x}{x-k}$ وكان المجال المشترك للدالتين f , g هو $R - \{-3\}$ فما قيمة k ؟

(أ) 3 (ب) -3 (جـ) 0 (د) -2

◂ اكتشف الخطأ :

4) قامت كل من دعاء وإيمان بالإجابة عن السؤال التالى :

إذا كانت : $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x - 5}$ فهل $f = g$ ؟

إجابة دعاء :

$\because f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}$

$\therefore D_f = R - \{-1 , 5\}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

$\because g(x) = \frac{x(x-1)}{x(x-5)}$

$\therefore D_g = R - \{0 , 5\}$, $g(x) = \frac{x-1}{x-5}$

$\because D_f \neq D_g$, $f(x) = g(x)$

$\therefore f \neq g$

إجابة إيمان :

$\because f(x) = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-5)}$

$\therefore f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

$\because g(x) = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x-5)}$

$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x-5}$

$\because f(x) = g(x)$

$\therefore f = g$

أى منهما إجابتها صحيحة ؟ ناقش.

ثانيًا تطبيق المفاهيم

5) أوجد المجال المشترك للدالتين f ، g فى كل مما يأتى :

1) $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

2) $g(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - x - 6}$, $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 3x - 10}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

6 أوجد المجال المشترك للدوال f , g , k حيث $k(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x}$, $g(x) = \frac{3}{x^2 - 9}$, $f(x) = \frac{x+2}{3}$

7 أثبت أن $f = g$ فى كل مما يأتى :

1 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ ، $g(x) = \frac{3x}{3x^2 - 12}$

2 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ ، $g(x) = \frac{x}{x - 2}$

3 $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$ ، $g(x) = \frac{6x}{6x + 12}$

8 فى كل مما يأتى هل $f = g$ ؟ ولماذا ؟

1 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$ ، $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12}$

2 $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$ ، $g(x) = \frac{2x - 6}{2x^2 - 10x + 12}$

9 عين قيم x التى تجعل $f(x) = g(x)$ للدالتين f , g فى كل مما يأتى :

1 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ ، $g(x) = \frac{1}{x + 1}$

2 $f(x) = \frac{x + 1}{x - 3}$ ، $g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x}$

3 $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$ ، $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 4}$

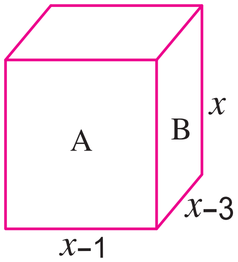
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

10 تناسب :

إذا كانت $x^2 - 9$, $x + 3$, $x^2 - 3x$, x أربع كميات متناسبة فما هى مجموعة قيم x الممكنة ؟

تفكير إبداعى

11 فى الشكل المقابل : صندوق على شكل متوازى مستطيلات. إذا كانت الدالة f معرفة بالنسبة بين مساحة الوجه A إلى المساحة الجانبية، الدالة g معرفة بالنسبة بين مساحة الوجه B والمساحة الجانبية، فاكتب كلًا من $f(x)$ ، $g(x)$ موضحًا مجال كل من الدالتين f , g وأوجد المجال المشترك للدالتين.



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للمجال المشترك وتساوى دوال الكسور الجبرية النسبية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس 2 - 5

العمليات على الكسور الجبرية النسبية
(Operations on Rational Algebraic Fractions)

▪ نواتج التعلم

- تجرى العمليات على الكسـور الجبرية النسبية.
- تعرف مفهوم المعكوس الجمعى، والمعكوس الضربى للكسر الجبرى النسبى.
- تعرف خـواص العمليات على الكسور الجبرية النسبية.

▪ المفـردات

- الكسور الجبرية النسبية Rational algebraic fractions
- مقلوب الدالة Reciprocal of the function

▪ معلومة سابقة

جمع وطرح الأعداد النسبية :

إذا كانـت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ أعـدادًا نسبية فإن :

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

فمثلًا :

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}$$

2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} \pm \frac{c\,b}{b\,d} = \frac{a\,d \pm c\,b}{b\,d}$

فمثلًا :

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} - \frac{1 \times 7}{7 \times 3} = \frac{9}{21} - \frac{7}{21} = \frac{2}{21}$$

استعد !

لكى يحصل خالـد على تقدير ممتاز فى امتحـان الرياضيات فى السـنة الأخيرة من دراسـته الجامعية لا بـد وأن يكون مجموع درجاته 8 على الأقل.

فإذا كانت درجاته فى امتحان الفصل الدراسى الأول تساوى $\frac{3x^2 + 16x + 21}{x^2 + 5x + 6}$

ودرجاتـه فى امتحان الفصل الدراسـى الثانى تساوى $\frac{5x^2 + 34x + 45}{x^2 + 7x + 10}$

فهل سيحصل خالد على تقدير ممتاز ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم العمليات على الكسور الجبرية النسبية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

كتب سامح : إذا كانت $f(x) = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3}$

فإن $f(x) = 1$ لجميع قيم x الحقيقية. هل ما كتبه سامح صحيح ؟ ولماذا ؟ ناقش.

تعلم !

أولًا جمع وطرح الكسور الجبرية النسبية

عمليتا جمع وطرح الكسور الجبرية النسبية تماثل عمليتى جمع وطرح الأعداد النسبية متبعًا الخطوات التالية :

1. تحليل بسط ومقام كل كسر ثم اختزاله على حدة إن امكن.
2. توحيد المقامات ثم إجراء عملية الجمع أو الطرح.
3. وضع الناتج النهائى فى أبسط صورة.

فمثلًا : بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة فإن :

1. $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{2x-1+x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$

2. $\frac{x^2-x}{x^2+2x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} + \frac{3}{x+3} = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3}$
$= \frac{x+3}{x+3} = 1$

3. $\frac{2}{x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2(1+x)}{x(1+x)} - \frac{2(x)}{x(1+x)} = \frac{2+2x-2x}{x(1+x)} = \frac{2}{x(1+x)}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 1

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1) $f(X)=\frac{X^2-4}{X^2-X-6}+\frac{X^2-5X+4}{X^2-4X+3}$

2) $f(X)=\frac{2X-2}{X^2-3X+2}-\frac{3X+3}{X^2-X-2}$

■ **لاحظ أن**

مجال دالة جمع أو طرح كسرين جبريين يساوى جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم X التى تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر.

① حلل كل كسر جبرى :

$$f(X)=\frac{(X-2)(X+2)}{(X-3)(X+2)}+\frac{(X-1)(X-4)}{(X-1)(X-3)}$$

أوجد مجال f :

$$D_f=R-\{3,-2,1\}$$

بسِّط كل كسر جبرى واجمع، ثم بسِّط الناتج :

$$f(X)=\frac{X-2}{X-3}+\frac{X-4}{X-3}=\frac{2X-6}{X-3}=\frac{2(X-3)}{X-3}=2$$

② حلل كل كسر جبرى :

$$f(X)=\frac{2(X-1)}{(X-1)(X-2)}-\frac{3(X+1)}{(X-2)(X+1)}$$

أوجد مجال f :

$$D_f=R-\{1,2,-1\}$$

بسِّط كل كسر جبرى واطرح :

$$f(X)=\frac{2}{X-2}-\frac{3}{X-2}=\frac{-1}{X-2}$$

مثال 2

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f حيث :

$$f(X)=\frac{2X+4}{X^2-4}+\frac{3X+3}{X^2-1}$$

ثم أوجد : $f(3)$ ، $f(-1)$ إن أمكن.

$$f(X)=\frac{2(X+2)}{(X+2)(X-2)}+\frac{3(X+1)}{(X+1)(X-1)}$$

$$D_f=R-\{-2,2,-1,1\}$$

$$f(X)=\frac{2}{X-2}+\frac{3}{X-1}=\frac{2(X-1)+3(X-2)}{(X-2)(X-1)}$$

$$=\frac{2X-2+3X-6}{(X-2)(X-1)}=\frac{5X-8}{(X-2)(X-1)}$$

$$f(3)=\frac{5\times3-8}{(3-2)(3-1)}=3.5$$

$f(-1)$ غير معرفة لأن $-1\notin D_f$

■ **تقييم ذاتى** ①

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1) $f(X)=\frac{X^2+2X}{X^2+5X}+\frac{X^2-5X+6}{X^2+2X-15}$

2) $f(X)=\frac{X^2+5X+4}{X^2-4X-5}-\frac{X^2+3X}{X^2-5X}$

■ **لاحظ أن**

يجب إيجاد مجال الدالة قبل التبسيط.

■ **تقييم ذاتى** ②

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f حيث :

$$f(X)=\frac{X+2}{X^2+2X}-\frac{X+2}{X^2-4}$$

ثم أوجد : $f(4)$ ، $f(-2)$

■ **خواص عملية جمع الكسور الجبرية النسبية**

1. الإبدال.
2. الدمج.
3. الصفر هو المحايد الجمعى.
4. توفر المعكوس الجمعى.

■ **لاحظ أن**

الكسر الجبرى النسبى $\frac{p(X)}{q(X)}$ له معكوس جمعى على الصورة $-\frac{p(X)}{q(X)}$ أو $\frac{-p(X)}{q(X)}$ أو $\frac{p(X)}{-q(X)}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ثانيًا ضرب الكسور الجبرية النسبية

عملية ضرب الكسور الجبرية النسبية تماثل تمامًا عملية ضرب الأعداد النسبية متبعًا الخطوات التالية :

1. تحليل بسط ومقام كل كسر تحليلًا كاملًا إن أمكن.
2. حذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام كل كسر ، وبين بسط أحد الكسور ومقام كسر آخر.
3. إجراء عملية الضرب ووضع الناتج النهائى فى أبسط صورة.

فمثلًا : بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة فإن :

1. $\frac{2x}{x-1} \times \frac{2x-2}{x^2+3x} = \frac{2x}{x-1} \times \frac{2(x-1)}{x(x+3)} = \frac{4}{x+3}$
2. $\frac{x^2-25}{x^2+5x} \times \frac{3x^2+18x}{x^2+x-30} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x+5)} \times \frac{3x(x+6)}{(x+6)(x-5)} = 3$

مثال 3

أوجد $f(x)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1. $f(x) = \frac{x^2+x-20}{x-3} \times \frac{2x^2-6x}{x^2+3x-10}$
2. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} \times \frac{x^2+6x+8}{4-x^2}$

■ لاحظ أن

مجال دالة حاصل ضرب كسرين جبريين يساوى جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم x التى تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر.

الحل

1. حلل كل كسر جبرى :

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-4)}{x-3} \times \frac{2x(x-3)}{(x+5)(x-2)}$$

أوجد مجال f :

$$D_f = R - \{3, -5, 2\}$$

بسِّط وأجرِ عملية الضرب :

$$f(x) = \frac{2x(x-4)}{x-2}$$

2. حلل كل كسر جبرى :

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)} \times \frac{(x+4)(x+2)}{(2-x)(2+x)}$$

أوجد مجال f :

$$D_f = R - \{-3, -4, 2, -2\}$$

بسِّط وأجرِ عملية الضرب، ثم بسِّط الناتج :

$$f(x) = \frac{x-2}{2-x} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$$

■ لاحظ أن

$x+2 = 2+x$

$2-x = -(x-2)$

■ معلومة سابقة

ضرب الأعداد النسبية :

إذا كان $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عددين نسبيين

فإن : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

فمثلاً :

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$

■ تقييم ذاتى 3

أوجد $f(x)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1. $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-3x-4} \times \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$
2. $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{9-x^2} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2-7x+6}$

■ خواص عملية ضرب الكسور الجبرية النسبية

1. الإبدال.
2. الدمج.
3. الواحد هو المحايد الضربى.
4. توفر المعكوس الضربى لكل كسر جبرى نسبى لا يساوى الصفر.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مقلوب دالة الكسر الجبرى النسبى

إذا كانت $f(x)$ دالة كسر جبرى نسبى فإن مقلوب دالة الكسر الجبرى النسبى $g(x)$ هو $g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

ومجال دالة المقلوب هو جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم x التى تجعل بسط ومقام الدالة $f(x)$ يساويان الصفر.

فمثلًا :

إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ دالة مجالها $R - \{-3\}$ فإن مقلوب الدالة هو $g(x)$ حيث

$$g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{x+3}{x-2}$$

ومجال الدالة g هو $R - \{-3, 2\}$

مثال 4

أوجد فى أبسط صورة $g(x)$ مقلوب الدالة $f(x)$ حيث $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x-10}$

موضحًا مجال g، ثم أوجد $g(-2)$ ، وإذا كان $g(x) = \frac{1}{2}$ فأوجد قيمة x

$$\because f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x-10} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$\therefore g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\therefore D_g = R - \{1, -2, 5\} \quad , \quad g(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

$g(-2)$ غير معرفة لأن $-2 \notin D_g$

وبوضع $g(x) = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x-5}{x-1} = \frac{1}{2} \qquad \therefore 2x - 10 = x - 1 \qquad \therefore x = 9 \in D_g$$

ثالثًا قسمة الكسور الجبرية النسبية

عملية قسمة الكسور الجبرية النسبية تماثل تمامًا عملية قسمة الأعداد النسبية أى أن عملية قسمة كسرين تتحول إلى ضرب الكسر الأول فى مقلوب الكسر الثانى.

فمثلًا : بفرض أن الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة والكسر الثانى لا يساوى الصفر فإن :

1. $\frac{3}{x} \div \frac{x-2}{x} = \frac{3}{x} \times \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x-2}$

2. $\frac{x^2+12x+20}{x^2-3x-10} \div \frac{x^2+10x}{x-5} = \frac{(x+2)(x+10)}{(x+2)(x-5)} \div \frac{x(x+10)}{x-5}$

$$= \frac{(x+2)(x+10)}{(x+2)(x-5)} \times \frac{x-5}{x(x+10)} = \frac{1}{x}$$

■ **لاحظ أن**

الكسر الجبرى النسبى $\frac{p(x)}{q(x)}$ له معكوس ضربى على الصورة $\frac{q(x)}{p(x)}$ ويكون هذا المعكوس معرفًا لكل

$p(x) \neq 0 , q(x) \neq 0$

■ **تقييم ذاتى 4**

أوجد فى أبسط صورة $g(x)$ مقلوب الدالة $f(x)$ حيث :

$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

موضحًا مجال g، ثم أوجد $g(2)$

وإذا كان $g(x) = \frac{1}{3}$

فأوجد قيمة x

■ **معلومة سابقة**

قسمة الأعداد النسبية :

إذا كان $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(حيث $\frac{c}{d} \neq 0$)

فمثلًا :

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 5

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1. $f(X)=\frac{X^2+2X+1}{1-X^2}\div\frac{X^2+5X+4}{X^2+3X-4}$
2. $f(X)=\frac{2X^2+5X+2}{2X^2+3X-2}\div\frac{3X^2+13X+4}{2X^2+7X-4}$

1) حلل كل كسر جبرى :

$$f(X)=\frac{(X+1)(X+1)}{(1-X)(1+X)}\div\frac{(X+1)(X+4)}{(X-1)(X+4)}$$

أوجد مجال f :

$$D_f=R-\{1,-1,-4\}$$

حول القسمة إلى ضرب، وذلك بالضرب فى المعكوس الضربى للمقسوم عليه :

$$f(X)=\frac{(X+1)(X+1)}{(1-X)(1+X)}\times\frac{(X-1)(X+4)}{(X+1)(X+4)}$$

أجرِ عملية الضرب، ثم بسِّط الناتج :

$$=\frac{X-1}{1-X}=\frac{X-1}{-(X-1)}=-1$$

2)

$$f(X)=\frac{(2X+1)(X+2)}{(2X-1)(X+2)}\div\frac{(3X+1)(X+4)}{(2X-1)(X+4)}$$

$$D_f=R-\{\frac{1}{2},-2,-4,\frac{-1}{3}\}$$

$$f(X)=\frac{(2X+1)(X+2)}{(2X-1)(X+2)}\times\frac{(2X-1)(X+4)}{(3X+1)(X+4)}=\frac{2X+1}{3X+1}$$

لاحظ أن

مجال دالة خارج قسمة كسرين جبريين يساوى جميع الأعداد الحقيقية مع استبعاد قيم X التى تجعل مقامى الكسرين يساويان الصفر وقيم X التى تجعل بسط الكسر المقسوم عليه يساوى الصفر.

تقييم ذاتى 5

أوجد $f(X)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

1. $f(X)=\frac{X^2-X-2}{X^2-4X-5}\div\frac{4-X^2}{X^2-3X-10}$
2. $f(X)=\frac{X^3-27}{X^2+X-12}\div\frac{X^2+3X+9}{2X+8}$

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1. $\frac{2}{X-2}-\frac{X}{X-2}=$ ....
   - (أ) -1
   - (ب) $\frac{2-X}{2(X-2)}$
   - (جـ) $\frac{X}{X-2}$
   - (د) $\frac{X+2}{X-2}$

2. $\frac{1}{X-2}+\frac{1}{X+2}=$ ....
   - (أ) $\frac{1}{(X-2)(X+2)}$
   - (ب) $\frac{2}{(X-2)(X+2)}$
   - (جـ) $\frac{4}{(X-2)(X+2)}$
   - (د) $\frac{2X}{(X-2)(X+2)}$

3. أى مما يأتى لا يمثل المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{X+2}{X-3}$ ؟
   - (أ) $-\frac{X+2}{X-3}$
   - (ب) $\frac{X+2}{3-X}$
   - (جـ) $\frac{X-3}{X+2}$
   - (د) $\frac{-X-2}{X-3}$

4. ما مجال مقلوب الدالة f حيث $f(X)=\frac{X-2}{X+3}$ ؟
   - (أ) $R-\{2\}$
   - (ب) $R-\{-2\}$
   - (جـ) $R-\{2,-3\}$
   - (د) $R-\{-2,3\}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

5 $\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2} = $ ....

(أ) $\frac{x}{x-1}$ (ب) $\frac{x-1}{x}$

(جـ) $\frac{x}{x+1}$ (د) $\frac{x+1}{x}$

6 ما مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-2}{x+3} \div \frac{x}{x-5}$ ؟

(أ) $R - \{-3\}$ (ب) $R - \{2, -3, 0, 5\}$

(جـ) $R - \{2, -3, 5\}$ (د) $R - \{-3, 5, 0\}$

7 إذا كانت $g(x)$ هى مقلوب الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-5}{x+7}$

وكانت $g(k) = \frac{3}{2}$ فما قيمة k ؟

(أ) 2 (ب) 3

(جـ) 29 (د) -29

8 إذا كانت $f(x) = \frac{4}{3x} + \frac{5}{3x}$ فإن : $[f(x)]^{-1} = $ ....

(أ) $\frac{3}{x}$ (ب) $\frac{x}{3}$

(جـ) $\frac{6}{x}$ (د) $\frac{x}{6}$

9 اكتشف الخطأ فى كل مما يأتى :

$$\frac{-4}{2-x} + \frac{2x}{x-2} = \frac{-4}{2-x} - \frac{2x}{2-x} = \frac{-4-2x}{2-x} = \frac{-2(2-x)}{2-x} = -2$$

$$\frac{2}{x-2} \times \frac{5x}{x^2-5x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{x}{x+1} - \frac{5}{x+3} = \frac{x-5}{(x+1)(x+3)}$$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

10 أوجد كلًا مما يأتى فى أبسط صورة (بفرض أن جميع الكسور الجبرية النسبية التالية معرفة) :

① $\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$ ② $\frac{2}{x-5} + \frac{x^2-27}{x-5}$ ③ $\frac{x}{3} - \frac{4}{x}$

④ $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$ ⑤ $\frac{x}{x+3} \div \frac{x^2}{x^2+3x}$ ⑥ $\frac{3x-6}{5x-20} \times \frac{10x-40}{27x-54}$

11 أوجد $f(x)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f فى كل مما يأتى :

① $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+2x}$ ② $f(x) = \frac{x^2+6x}{x^2+5x} + \frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}$

③ $f(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}$ ④ $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} - \frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑤ $f(x)=\frac{3x+15}{x^2+7x+10}-\frac{x+5}{x^2+6x+5}$

⑥ $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^3-8}+\frac{x^2-x-12}{x^2+x-6}$

⑦ $f(x)=\frac{x^2+x-20}{x^2+2x-15}\times\frac{x^2+4x-21}{x^2+3x-28}$

⑧ $f(x)=\frac{x^2-11x+28}{x^2-13x+42}\times\frac{x^2+7x+10}{20-x-x^2}$

⑨ $f(x)=\frac{2x^2+5x+2}{2x^2+7x+3}\times\frac{x^2-7x-30}{x^2-6x-40}$

⑩ $f(x)=\frac{3x-15}{x+4}\div\frac{5-x}{6x+24}$

⑪ $f(x)=\frac{x^2-2x}{2x^2-x-6}\div\frac{2x^2-3x}{4x^2-9}$

⑫ $f(x)=\frac{6x^2+13x+6}{4x^2-9}\div\frac{6x^2+x-2}{4x^2-1}$

⑫ أوجد $f(x)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f حيث $f(x)=\frac{x^2-x-20}{x^2+2x-8}+\frac{3x+6}{x^2-4}$

ثم أوجد إن أمكن $f(-2)$ ، $f(5)$

⑬ أوجد $f(x)$ فى أبسط صورة موضحًا مجال f حيث $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\div\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}$

ثم أوجد إن أمكن $f(3)$ ، $f(1)$ ، $f(-4)$ ، وإذا كانت $f(k)=\frac{3}{4}$ أوجد قيمة k

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑭ معين مساحته $\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}$ وحدة مربعة ، وارتفاعه $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x}$ وحدة طول.

أوجد طول قاعدته بدلالة x فى أبسط صورة.

تفكير إبداعى

⑮ إذا كان $\frac{x-7}{x+3}=\frac{x^2-9x+20}{x^2-16}\times\frac{x^2+ax-b}{x^2-2x-15}$ أوجد قيمة : $a+b$

⑯ إذا كان مجال الدالة f حيث $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{b-x}$ هو $R-\{0,4\}$ وكانت $f(2)=3$

أوجد قيمة كل من a ، b

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للعمليات على الكسور الجبرية النسبية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقييم الوحدة الثانية

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الثانية ؟

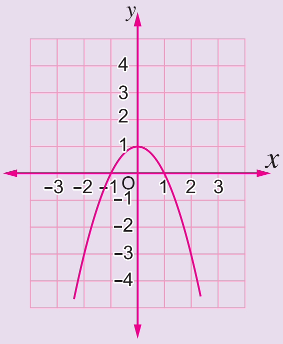
ضع علامة فى المربع المناسب

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

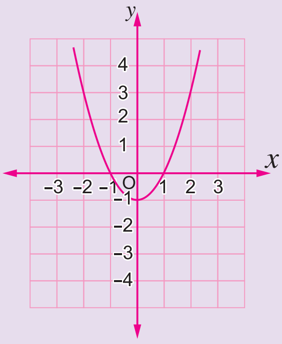
(1) ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f حيث $f(x) = x^2 + 4$ ؟

(أ) $\{-2\}$ (ب) $\{2\}$ (جـ) $\{-2 , 2\}$ (د) $\varnothing$

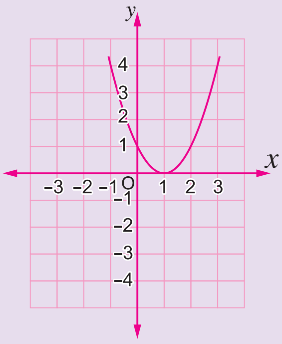
(2) ما الشكل البيانى الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 1$ ؟



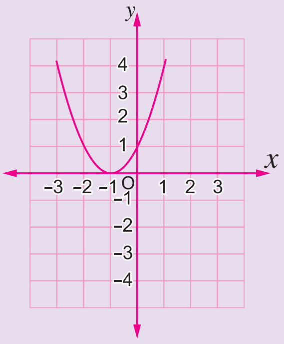
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(3) ما مجال الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$ ؟

(أ) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{R} - \{0 , 1 , 3\}$ (جـ) $\mathbb{R} - \{1 , 3\}$ (د) $\mathbb{R} - \{0 , 3\}$

(4) ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} \times \dfrac{x^2 + x}{x^2}$ ؟

(أ) $\varnothing$ (ب) $\mathbb{R}$ (جـ) $\{0 , 1 , -3\}$ (د) $\{0 , 1\}$

◂ أكمل كلًا مما يأتى :

(5) إذا كانت : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$ فإن مجموعة قيم x التى تجعل $f(x) = \dfrac{3}{5}$ هى ....

(6) رأس المنحنى للدالة f حيث $f(x) = (x - 3)^2 + 1$ هو ....

(7) المجال المشترك للدالتين f_1 ، f_2 حيث $f_1(x) = \dfrac{x - 7}{x + 1}$ ، $f_2(x) = \dfrac{x + 3}{x(x - 7)}$ هو ....

(8) الدالة f حيث $f(x) = x^2 + 3x - 4$ تقطع محور y فى النقطة ....

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) إذا كانت : $f_1(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$ ، $f_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x}$ فأثبت أن : $f_1 = f_2$

(10) أوجد فى أبسط صورة $f(x)$ موضحًا مجال f إذا كانت : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x} + \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

(11) إذا كانت : $p(x) = \frac{x^2 - 25}{5x - x^2}$ فأوجد مجال $[p(x)]^{-1}$

(12) مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ موضحًا على الرسم محور التماثل

وأوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

نشاط الوحدة الثانية — الدالة التربيعية

◂ الهدف من النشاط :

فهم الدالة التربيعية، واستخدام التكنولوجيا فى رسمها ودراسة منحناها.

◂ خطوات التنفيذ :

بالتعاون مع أحد زملائك حاول القيام بما يلى :

1. ابحث باستخدام مصادر مختلفة مثل (كتب مكتبة مدرستك - الإنترنت - أحد تطبيقات الذكاء الاصطناعى - ...) عن مواقف فى مجالات مختلفة يمكن تمثيلها بدالة تربيعية، مثل : حركة المقذوفات - تصميم الجسور والأقواس - تصميم أنظمة رش المياه فى الأراضى الزراعية.
2. اختر أيًا منها، ثم استخدم أحد البرامج التفاعلية مثل GeoGebra فى رسم هذه الدالة.
3. استخدم ما تعلمته عن الدالة التربيعية وارسم منحنى الدالة، ثم حدد رأس المنحنى وفسر معناه فى سياق المشكلة.
4. وضح خطوات الحل، مع التأكيد على كيفية الاستفادة من طريقة رسم منحنى الدالة التربيعية فى حالة عدم إتاحة برامج تفاعلية لرسم الدوال.

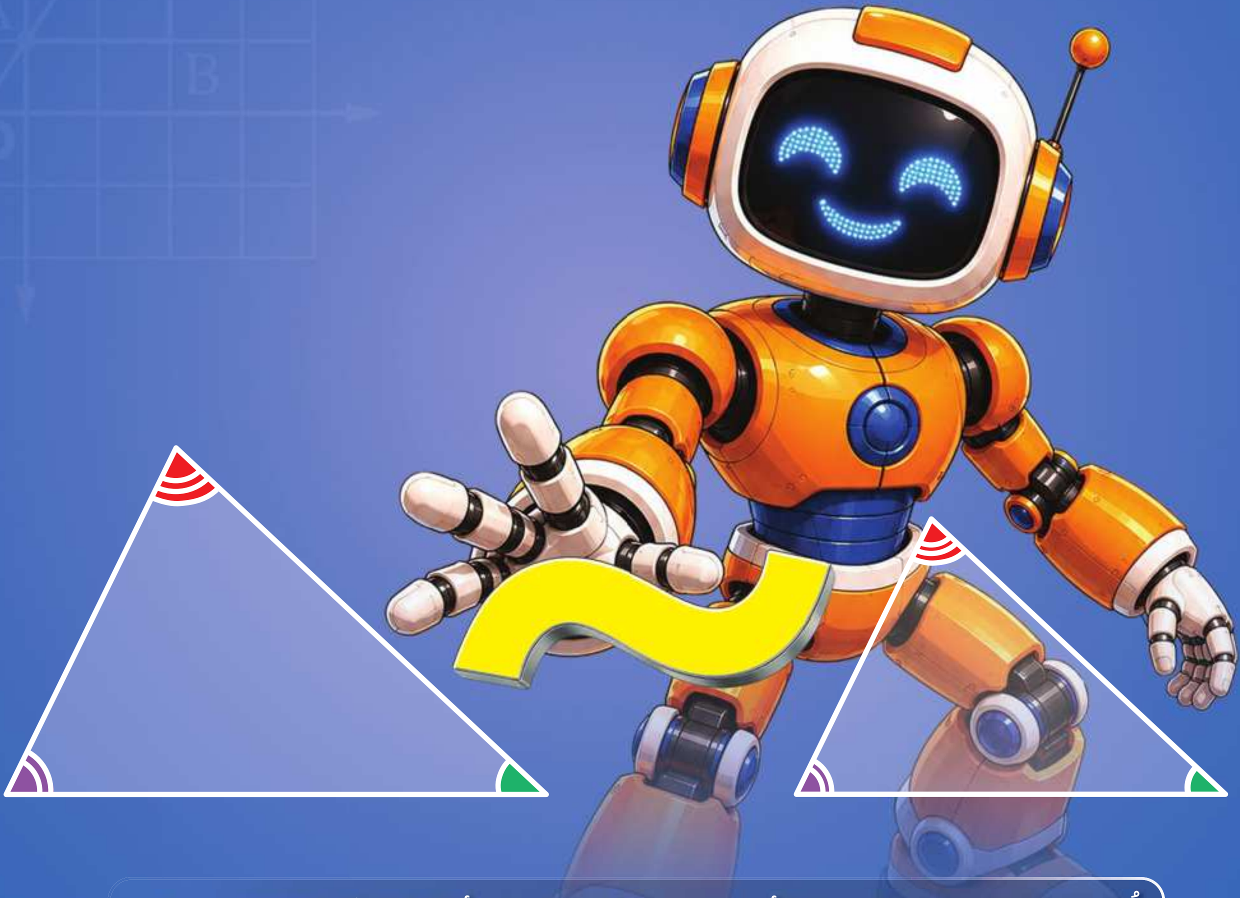
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الوحدة 3

الهندسة

دروس الوحدة

3-1 تشابه المضلعات
3-2 تشابه المثلثات
3-3 التمدد
3-4 النسب المثلثية للزاوية الحادة
3-5 النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
3-6 العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين
3-7 معادلة الخط المستقيم



تُعد معادلة الخط المستقيم من الأسس الرياضية التى تساعد أنظمة الذكاء الاصطناعى على فهم الأنماط واتخاذ القرارات بشكل دقيق، والوصول لحل بعض من المشكلات الهندسية.

◀ **فهل يمكن استخدام القوانين الهندسية فى الوصول إلى حلول أكثر تعقيدًا فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى ؟**

القضايا والمهارات

- التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.
- التنمية المستدامة.

القيــــم

- الوعى البيئى.
- الوعى الحضارى.
- التذوق الجمالى.
- العمل الجماعى.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس 3 - 1

تشابه المضلعات
(Similarity of Polygons)

■ نواتج التعلم

- تعرف شروط تشابه مضلعين.
- تعرف نسبة التشابه.
- تستخدم خواص التشابه فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفردات

- التشابه Similarity
- نسبة التشابه Similarity ratio

■ لاحظ أن

عند كتابة المضلعين المتشابهين يجب كتابتهما بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.

المضلع	A	B	C	D
~	↓	↓	↓	↓
المضلع	E	F	G	H

■ الترميز فى الرياضيات

يُستخدم الرمز ~ للتعبير عن تشابه المضلعات.

استعد!

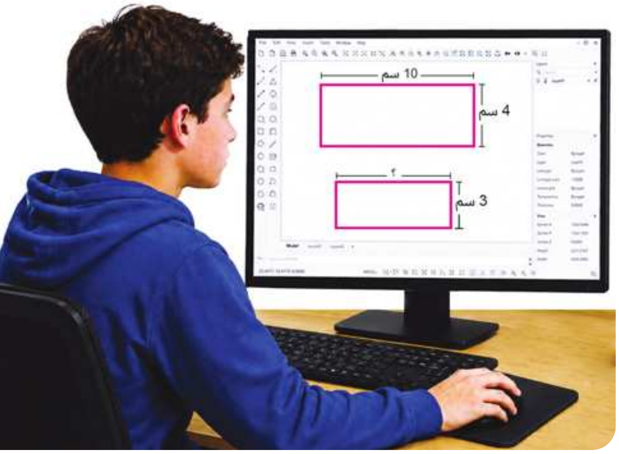
برع المصريون القدماء فى نحت تماثيل ضخمة لملوكهم لتزيين المعابد.
ولتنشيط السياحة، يصنع المصريون اليوم نماذج تذكارية مصغرة تحاكى تلك التماثيل الأصلية بدقة عالية.
أمامك تمثال الملك تحتمس الثالث أحد أعظم حكام الدولة الحديثة بمصر القديمة، كم يبلغ ارتفاع نموذج مصغر له عرضه 5 سم؟

فى هذا الدرس سوف تتعرف على شروط تشابه المضلعات؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تمثال الملك تحتمس الثالث

فكر وناقش!

استخدم مروان أحد برامج الرسم الهندسى للحصول على نسخة مصغرة من المستطيل فكم يكون طول المستطيل فى النسخة المصغرة ؟



تعلم!

تشابه مضلعين

يتشابه المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا :

① زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس. ② أضلاعهما المتناظرة أطوالها متناسبة.

إذا كان المضلعان ABCD ، EFGH فيهما :

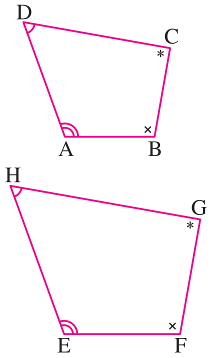
① $m(\angle A) = m(\angle E)\ ,\ m(\angle B) = m(\angle F)$

$m(\angle C) = m(\angle G)\ ,\ m(\angle D) = m(\angle H)$

② $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$

فإن : المضلع ABCD ~ المضلع EFGH

حيث k هى نسبة تشابه المضلع ABCD إلى المضلع EFGH



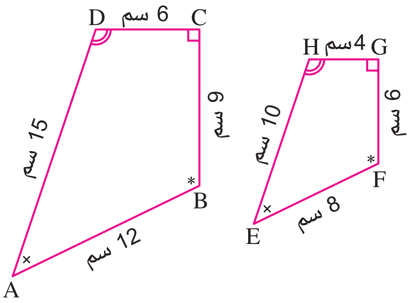
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 1

فى الشكل المقابل :

أثبت أن المضلعين ABCD ، EFGH متشابهان

واكتب نسبة تشابه المضلع ABCD إلى المضلع EFGH



∵ المضلعان ABCD ، EFGH فيهما :

1. $m(\angle A) = m(\angle E)$, $m(\angle B) = m(\angle F)$, $m(\angle C) = m(\angle G)$,
$m(\angle D) = m(\angle H)$

2. $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{BC}{FG} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{CD}{GH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{DA}{HE} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

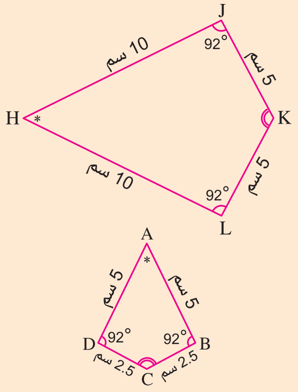
$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{3}{2}$

∴ المضلع ABCD ~ المضلع EFGH

ونسبة تشابه المضلع ABCD إلى المضلع EFGH هى $\frac{3}{2}$

■ **تقييم ذاتى** 1

فى الشكل التالى :
أثبت أن المضلعين متشابهان
واكتب نسبة تشابه المضلع ABCD إلى المضلع HLKJ

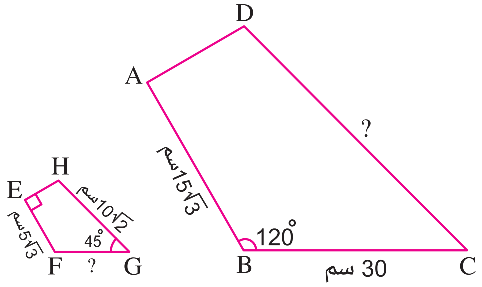


مثال 2

فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع EFGH ~ المضلع ABCD

1. أوجد m (∠ H) ، m (∠ C)
2. أوجد طول كل من $\overline{FG}$ ، $\overline{DC}$



1. ∵ ABCD ~ EFGH

$\therefore m(\angle A) = m(\angle E) = 90°$, $m(\angle B) = m(\angle F) = 120°$,
$m(\angle C) = m(\angle G) = 45°$

$\therefore m(\angle D) = m(\angle H) = 360° - (90° + 120° + 45°) = 105°$

2. ∵ ABCD ~ EFGH

$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$ $\therefore \frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{30}{FG}$

$\therefore FG = \frac{5\sqrt{3} \times 30}{15\sqrt{3}} = 10$

أى أن طول $\overline{FG}$ هو 10 سم

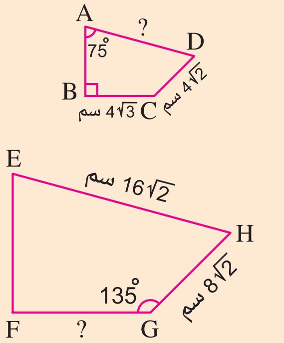
$\frac{AB}{EF} = \frac{DC}{HG}$ $\therefore \frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{DC}{10\sqrt{2}}$

$\therefore DC = \frac{15\sqrt{3} \times 10\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 30\sqrt{2}$

أى أن طول $\overline{DC}$ هو $30\sqrt{2}$ سم

■ **تقييم ذاتى** 2

فى الشكل التالى :
إذا كان ABCD ~ EFGH

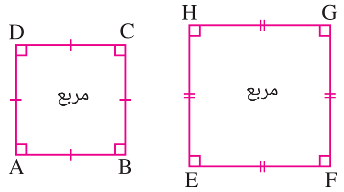


1. أوجد : m (∠ D) ، m (∠ C)
2. أوجد طول كل من $\overline{AD}$ ، $\overline{FG}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

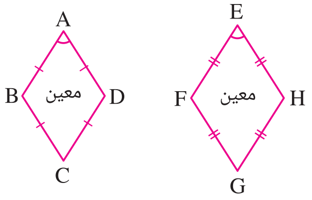
شروط تشابه الأشكال الرباعية الخاصة

جميع المربعات متشابهة



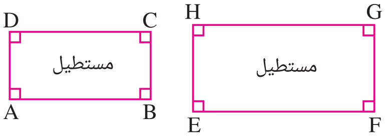
ABCD ~ EFGH

يتشابه المعينان إذا تساوى قياسا زاويتين متناظرتين فيهما



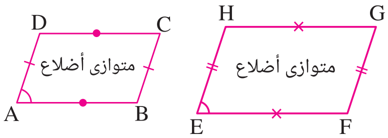
إذا كان m (∠ A) = m (∠ E)
فإن ABCD ~ EFGH

يتشابه المستطيلان إذا تناسب بعداهما المتناظران



إذا كان $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$
فإن ABCD ~ EFGH

يتشابه متوازيا الأضلاع إذا ساوى قياس زاوية فى أحدهما قياس زاوية فى الآخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان

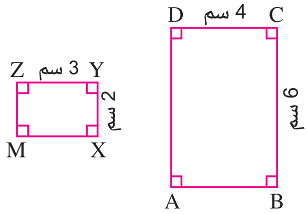


إذا كان m (∠ A) = m (∠ E)،
$\frac{AD}{EH} = \frac{AB}{EF}$
فإن ABCD ~ EFGH

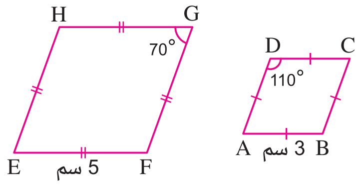
مثال 3

فى كل مما يأتى أثبت أن المضلعين متشابهان، واكتب نسبة تشابه :

1 المستطيل ABCD إلى المستطيل XYZM



2 المعين ABCD إلى المعين EFGH



1 ∵ المستطيلان ABCD ، XYZM

فيهما :

$\frac{BC}{YZ} = \frac{6}{3} = 2 , \frac{CD}{ZM} = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZM} = 2$

∴ ABCD ~ XYZM

ونسبة تشابه المستطيل ABCD

إلى المستطيل XYZM تساوى 2

2 فى المعين ABCD :

m (∠ C) = 180° – 110° = 70°

∴ المعينان ABCD ، EFGH فيهما :

m (∠ C) = m (∠ G) = 70°

∴ ABCD ~ EFGH

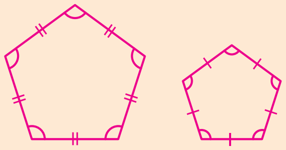
$\because \frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}$

∴ نسبة تشابه المعين ABCD

إلى المعين EFGH تساوى $\frac{3}{5}$

■ **لاحظ أن**

المضلعات المنتظمة التى لها نفس عدد الأضلاع تكون متشابهة دائماً.



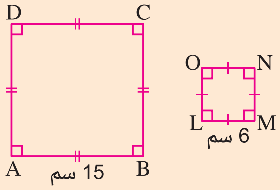
■ **ناقش مع زملائك**

ناقش مع زملائك شروط تشابه الأشكال الرباعية الخاصة، وكيف تستنتجها من شرطى تشابه المضلعين السابق ذكرهما.

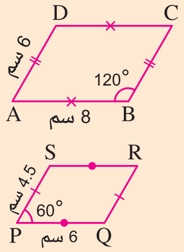
■ **تقييم ذاتى 3**

فى كل مما يأتى، أثبت أن المضلعين متشابهان، واكتب نسبة تشابه :

1 المربع ABCD إلى المربع LMNO



2 متوازى الأضلاع ABCD إلى متوازى الأضلاع PQRS



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ملاحظة :

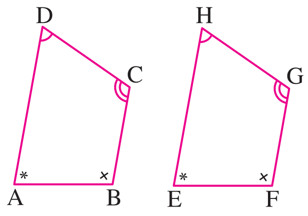
إذا كان المضلع ABCD ~ المضلع EFGH

فإن : $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$

ومن خواص التناسب تستنتج أن :

$\frac{AB + BC + CD + DA}{EF + FG + GH + HE} = k$

$\therefore$ $\frac{\text{محيط المضلع ABCD}}{\text{محيط المضلع EFGH}} = k$ (نسبة التشابه)



أى أن :

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

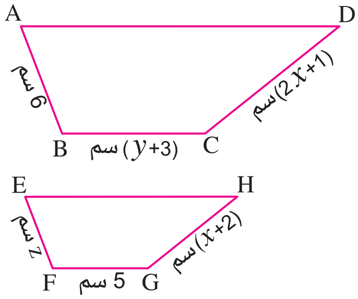
مثال 4

فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع ABCD ~ المضلع EFGH

$\frac{\text{محيط المضلع ABCD}}{\text{محيط المضلع EFGH}} = \frac{3}{2}$

فأوجد قيمة كل من x، y، z



$\because$ المضلع ABCD ~ المضلع EFGH ، $\frac{\text{محيط المضلع ABCD}}{\text{محيط المضلع EFGH}} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore \frac{6}{z} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore z = \frac{2 \times 6}{3} = 4$

$\frac{BC}{FG} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore \frac{y+3}{5} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore y + 3 = \frac{5 \times 3}{2}$

$\therefore y + 3 = 7.5$ $\qquad \therefore y = 7.5 - 3 = 4.5$

$\frac{CD}{GH} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore \frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{2}$

$\therefore 4x + 2 = 3x + 6$ $\qquad \therefore 4x - 3x = 6 - 2$ $\qquad \therefore x = 4$

نشاط تعاونى

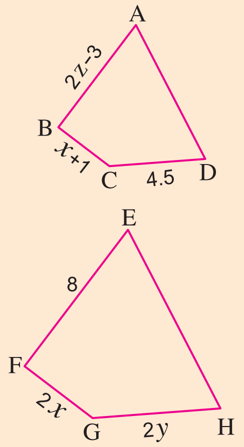
تعاون مع أحد زملائك بالفصل فى قياس أبعاد ملعب مدرستك، ثم ارسم فى كراستك مستطيلاً يشابه هذا الملعب، واكتب نسبة التشابه بين هذا المستطيل وملعب مدرستك.

■ **تقييم ذاتى 4**

فى الشكل التالى :

إذا كان ABCD ~ EFGH

$\frac{\text{محيط ABCD}}{\text{محيط EFGH}} = \frac{3}{4}$



فأوجد قيمة كل من x، y، z

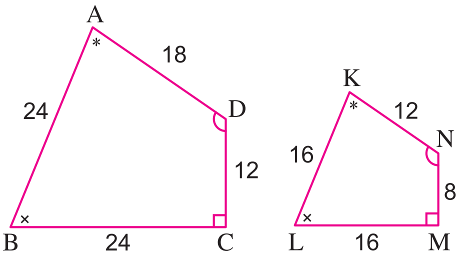
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 فى الشكل التالى :

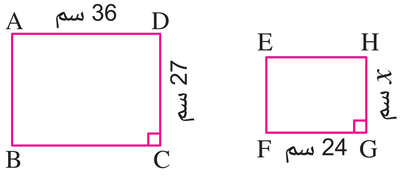


ما نسبة تشابه المضلع KLMN إلى المضلع ABCD ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$

(جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{1}$

2 فى الشكل التالى :

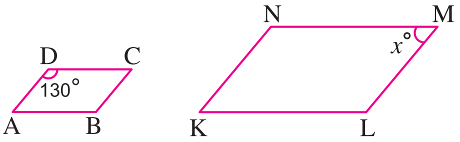


إذا كان المستطيل ABCD ~ المستطيل EFGH فما قيمة x ؟

(أ) 27 (ب) 9

(جـ) 18 (د) 24

3 فى الشكل التالى :



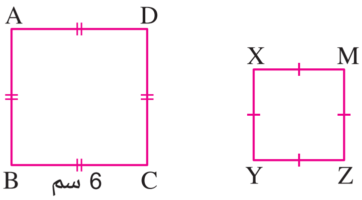
متوازى الأضلاع ABCD ~ متوازى الأضلاع KLMN

فما قيمة x ؟

(أ) 50 (ب) 130

(جـ) 60 (د) 70

4 فى الشكل التالى :



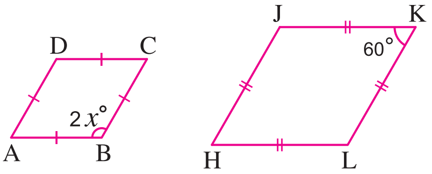
إذا كان $\frac{\text{محيط المربع } ABCD}{\text{محيط المربع } XYZM} = \frac{3}{2}$

فما مساحة المربع XYZM ؟

(أ) 36 سم^2 (ب) 24 سم^2

(جـ) 16 سم^2 (د) 8 سم^2

5 فى الشكل التالى :



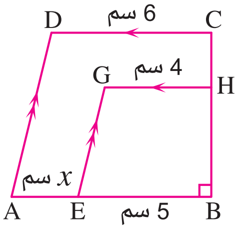
إذا كان المعين ABCD ~ المعين HLKJ

فما قيمة x ؟

(أ) 60 (ب) 120

(جـ) 100 (د) 80

6 فى الشكل التالى :



إذا كان المضلع ABCD ~ المضلع EBHG فما قيمة x ؟

(أ) 5 (ب) 2.5

(جـ) 7.5 (د) 4

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

⑦ مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما 3 : 2 ومحيط المضلع الأصغر 34 سم، فما محيط المضلع الأكبر ؟

(أ) 17 سم　　(ب) 34 سم　　(جـ) 51 سم　　(د) 68 سم

◂ اكتشف الخطأ :

⑧ سأل المعلم تلاميذه السؤال التالى :

هل كل المضلعات المنتظمة متشابهة ؟

فكانت إجابة كل من أحمد ونورهان كما بالشكل المقابل.

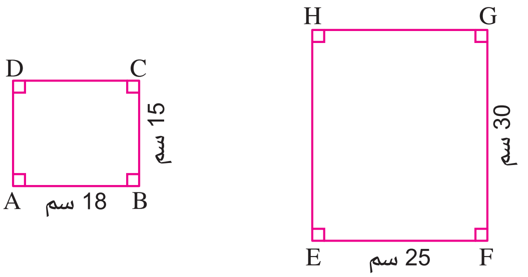
فأى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

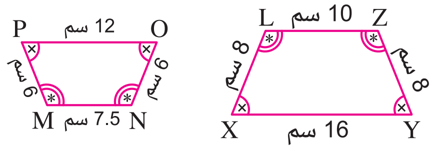
حـل أحمد :
نعم كل المضلعات المنتظمة متشابهة

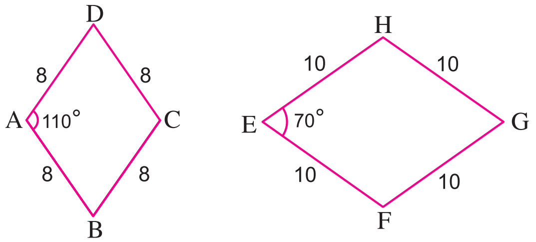
حـل نورهان :
ليس كل المضلعات المنتظمة متشابهة إلا إذا كان لهم نفس عدد الأضلاع

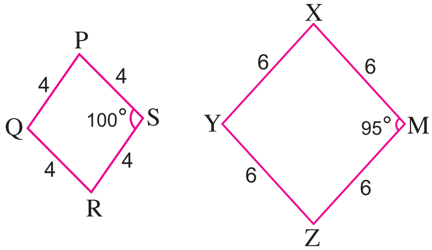
ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ بيِّن أيًا من أزواج المضلعات الآتية متشابهة، وأيها غير متشابهة :

① 

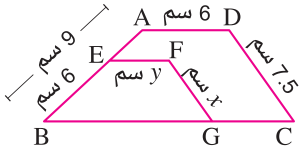
② 

③ 

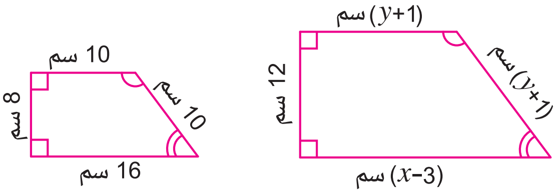
④ 

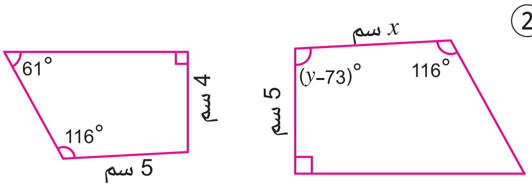
⑩ فى الشكل المقابل : إذا كان المضلع ABCD ~ المضلع EBGF

فأوجد قيمة كل من : x ، y



⑪ إذا كان كل زوج من أزواج المضلعات الآتية متشابهة ، فأوجد قيمة كل من x ، y ؟

① 

② 

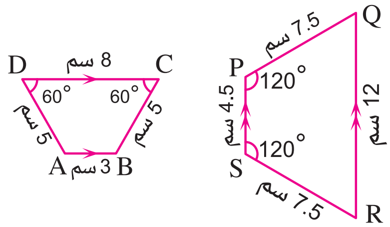
⑫ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه 3 سم ، 5 سم ، 6 سم ، 8 سم ، 10 سم ، والآخر محيطه 80 سم، فأوجد أطوال أضلاع المضلع الثانى.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

13 فى الشكل المقابل :

أثبت أن :

المضلع ABCD ~ المضلع SPQR



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

14 **ترفيه :** شاشة سينما مستطيلة الشكل، عرضها 45 قدماً وارتفاعها 25 قدماً. اشرح أيًّا من تنسيقات شاشات التليفزيون الموضحة بالرسم تعتقد أنه سيعرض المشهد الأكثر اكتمالاً من فيلم يعرض على شاشة السينما.

15 **تكنولوجيا :** عرض أحمد عرضًا تقديميًا على حائط فصله. يبلغ عرض شاشة الحاسوب الخاص به 13.25 بوصة وارتفاعها 10.6 بوصة، أما الصورة المعروضة على الحائط فيبلغ عرضها 53 بوصة وارتفاعها 42.4 بوصة.

هل الشكلان متشابهان ؟

إذا كانا متشابهين، فما نسبة تشابه شاشة الحاسوب إلى الصورة المعروضة ؟

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لتشابه المضلعات ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

3 - 2

تشابه المثلثات
(Similarity of Triangles)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف شروط تشابه مثلثين.
- تستخدم تشابه المثلثين في إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.
- تثبت تشابه مثلثين.
- تستخدم تشابه المثلثين فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- تشابه المثلثات
Similarity of triangles

■ **لاحظ أن**

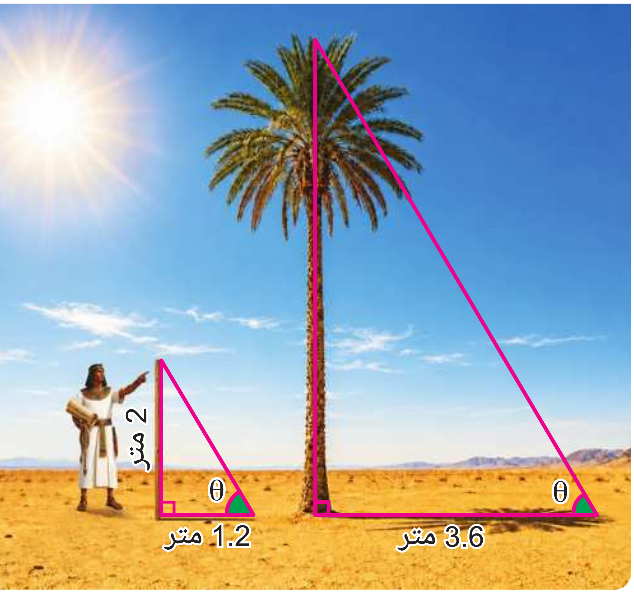
فى هذه الحالة يمكن من التشابه استنتاج أن :

- $m(\angle C) = m(\angle F)$
- $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

استعد !

المصريون القدماء أول الشعوب التى استخدمت الظل لحساب ارتفاعات الأشياء العالية، وتعتمد هذه الفكرة على معرفة طول ظل جسم معروف الارتفاع مثل عصا، وطول ظل الجسم المراد معرفة ارتفاعه.

فى الصورة يستخدم شخص عصا عمودية على الأرض لمعرفة ارتفاع النخلة. فهل يمكنك إيجاد ارتفاع النخلة ؟

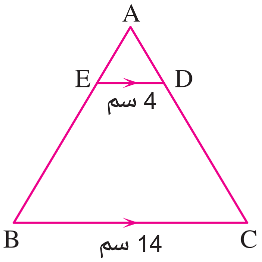


فى هذا الدرس سوف تتعرف على مفهوم تشابه المثلثات وحالات تشابه مثلثين؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

فى الشكل المقابل : إذا علمت أن محيط ΔABC يساوى 49 سم، فما محيط المثلث AED ؟

أى من الإجابتين التاليتين صحيحة :



إجابة على :	إجابة مريم :
محيط $\Delta AED = 35$ سم	محيط $\Delta AED = 14$ سم

تعلم !

حالات تشابه مثلثين

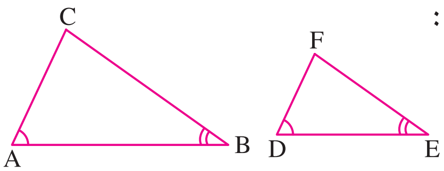
الحالة الأولى : زاويتان (AA)

إذا طابقت زاويتان فى مثلث زاويتين فى مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.

إذا كان المثلثان DEF ، ABC فيهما :

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$

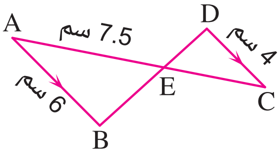
فإن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 1

فى الشكل المقابل :



$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$ ، $\overline{AB} // \overline{DC}$ ،

$AB = 6$ سم ، $AE = 7.5$ سم ، $DC = 4$ سم ، $BD = 7$ سم

أثبت أن : $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ وأوجد طول كل من $\overline{EC}$ ، $\overline{DE}$ ، $\overline{BE}$

$\because \overline{AB} // \overline{CD}$

$\therefore m(\angle A) = m(\angle C)$ (بالتبادل) ، $m(\angle B) = m(\angle D)$ (بالتبادل)

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CDE$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$$

$\because BE + DE = 7 \qquad \therefore BE = 7 - DE$

$\therefore \frac{6}{4} = \frac{7 - DE}{DE} = \frac{7.5}{CE} \qquad \therefore \frac{6}{4} = \frac{7.5}{CE} \qquad \therefore CE = \frac{4 \times 7.5}{6} = 5$

$\frac{6}{4} = \frac{7 - DE}{DE} \qquad \therefore 6\,DE = 28 - 4\,DE \qquad \therefore 10\,DE = 28$

$\therefore DE = 2.8 \qquad \therefore BE = 7 - 2.8 = 4.2$

$\therefore$ طول $\overline{EC} = 5$ سم ، طول $\overline{DE} = 2.8$ سم ، طول $\overline{BE} = 4.2$ سم

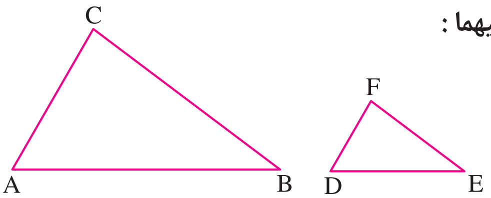
الحالة الثانية : ثلاثة أضلاع (SSS)

إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

إذا كان المثلثان ABC ، DEF فيهما :

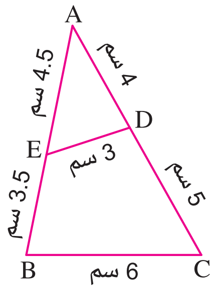
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

فإن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



مثال 2

فى الشكل المقابل :



أثبت أن $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

موضحًا نسبة تشابه ΔABC إلى ΔADE

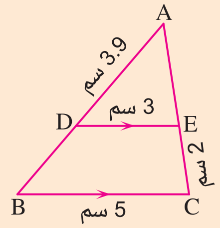
$\because \frac{AB}{AD} = \frac{4.5 + 3.5}{4} = 2 \quad , \quad \frac{BC}{DE} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad \frac{AC}{AE} = \frac{4 + 5}{4.5} = 2$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = 2 \qquad \therefore \Delta ABC \sim \Delta ADE$

$\therefore$ نسبة تشابه ΔABC إلى $\Delta ADE = \frac{2}{1}$

تقييم ذاتى 1

فى الشكل التالى :



$D \in \overline{AB}$, $\overline{DE} // \overline{BC}$,

$E \in \overline{AC}$

أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

ثم أوجد طول كل من :

$\overline{BD}$, $\overline{AE}$

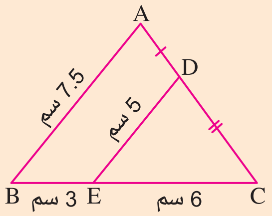
لاحظ أن

فى هذه الحالة يمكن من التشابه استنتاج أن :

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$
- $m(\angle C) = m(\angle F)$

تقييم ذاتى 2

فى الشكل التالى :



إذا كان :

$DC = 2\,AD$

أثبت أن :

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEC$
2. $\overline{DE} // \overline{AB}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الحالة الثالثة : ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

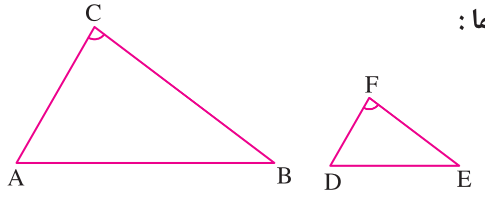
إذا طابقت زاوية فى مثلث زاوية فى مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، فإن المثلثين متشابهان.

إذا كان المثلثان ABC ، DEF فيهما :

$m(\angle C) = m(\angle F)$

، $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

فإن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



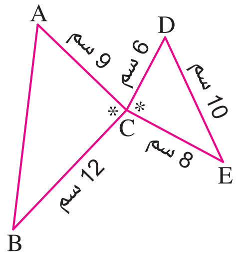
مثال 3

فى الشكل المقابل :

$m(\angle ACB) = m(\angle DCE)$

استخدم الأطوال الموضحة فى إثبات أن :

$\Delta ABC \sim \Delta DEC$ ، ثم أوجد طول $\overline{AB}$



$\because \frac{AC}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ، $\frac{BC}{EC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$

$\because m(\angle ACB) = m(\angle DCE)$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEC$

وينتج من التشابه أن :

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{AB}{10} = \frac{3}{2}$ $\therefore AB = \frac{3 \times 10}{2} = 15$

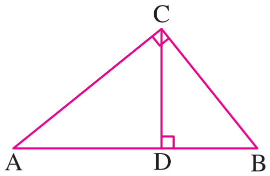
$\therefore$ طول $\overline{AB} = 15$ سم

التشابه فى المثلثات القائمة

فى المثلث القائم الزاوية، العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

إذا كان ΔABC قائم الزاوية فى C ، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

فإن : $\Delta ACB \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$



ويمكن استنتاج ذلك باستخدام الحالة الأولى من تشابه المثلثات كالتالى :

المثلثان ACB ، ADC فيهما :

$m(\angle ADC) = m(\angle ACB)$ (كل منهما زاوية قائمة)

$m(\angle A) = m(\angle A)$ (زاوية مشتركة)

$\therefore$ $\Delta ADC \sim \Delta ACB$ .... (1)

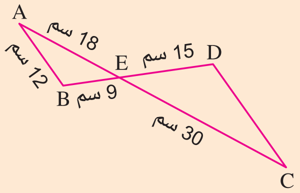
■ لاحظ أن

فى هذه الحالة يمكن من التشابه استنتاج أن :

- $m(\angle A) = m(\angle D)$
- $m(\angle B) = m(\angle E)$
- $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE}$

■ تقييم ذاتى (3)

فى الشكل التالى :



$\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{E\}$

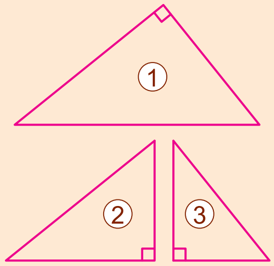
استخدم الأطوال الموضحة على الرسم فى إثبات أن :

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

ثم أوجد طول $\overline{DC}$

■ لاحظ أن

المثلثان المشابهان لثالث متشابهان.



فإذا كان :

$\Delta 2 \sim \Delta 1$, $\Delta 3 \sim \Delta 1$

فإن :

$\Delta 2 \sim \Delta 3$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

المثلثان ACB ، CDB فيهما :

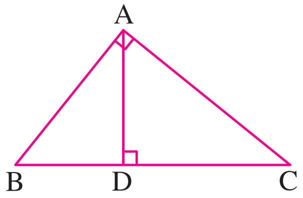
$m(\angle CDB) = m(\angle ACB)$ (كل منهما زاوية قائمة)

$m(\angle B) = m(\angle B)$ (زاوية مشتركة)

$\therefore \Delta CDB \sim \Delta ACB$ .... ②

من ①، ② تستنتج أن : $\Delta ADC \sim \Delta ACB \sim \Delta CDB$

مثال 4



فى الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية فى A ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أثبت أن : $(AD)^2 = BD \times DC$

$\because m(\angle BAC) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

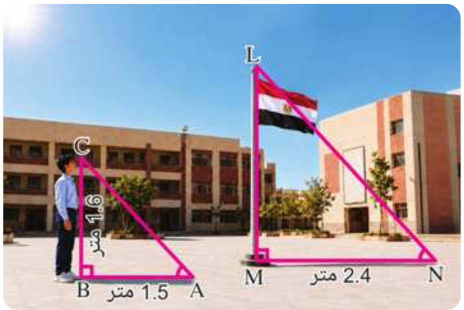
$\therefore \Delta ADB \sim \Delta CDA$

وينتج من التشابه أن :

$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA}$ $\therefore (AD)^2 = DB \times CD$

مثال 5

أراد طالب طوله 1.6 متر استخدام تساوى قياسات زوايا ميل أشعة الشمس الساقطة على الأرض لمعرفة ارتفاع العلم فى مدرسته فإذا كان طول ظل الطالب 1.5 متر وطول ظل سارية العلم 2.4 متر فما ارتفاع العلم ؟



$\because$ المثلثان ABC ، NML فيهما :

$m(\angle A) = m(\angle N)$, $m(\angle B) = m(\angle M) = 90°$

$\therefore \Delta NML \sim \Delta ABC$ وينتج من التشابه أن :

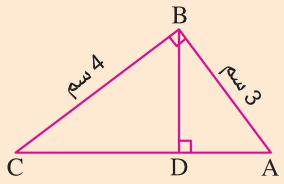
$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{ML}$ $\therefore \frac{1.5}{2.4} = \frac{1.6}{ML}$

$\therefore ML = \frac{2.4 \times 1.6}{1.5} = 2.56$

أى أن ارتفاع العلم = 2.56 متر.

■ **تقييم ذاتى ④**

فى الشكل التالى :



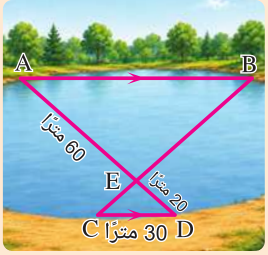
$D \in \overline{AC}$ بحيث $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

أوجد طول كل من :

$\overline{AD}$ ، $\overline{DC}$

■ **تقييم ذاتى ⑤**

فى الشكل التالى :



ما البعد بين الشجرتين A ، B على جانبى البحيرة ؟

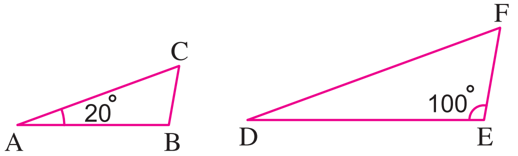
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل التالى :

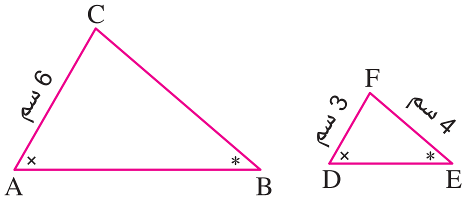


إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ فما قياس $\angle F$ ؟

(أ) 20° (ب) 60°

(جـ) 80° (د) 100°

(2) فى الشكل التالى :

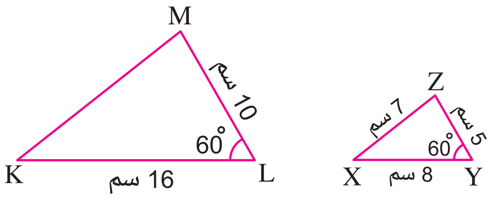


ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 4 سم (ب) 6 سم

(جـ) 8 سم (د) 10 سم

(3) فى الشكل التالى :

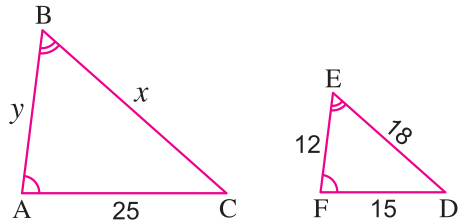


ما طول $\overline{KM}$ ؟

(أ) 7 سم (ب) 8 سم

(جـ) 14 سم (د) 16 سم

(4) فى الشكل التالى :

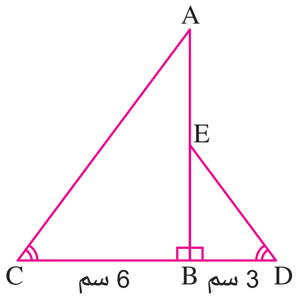


ما قيمة المقدار $x + y$ ؟

(أ) 18 (ب) 30

(جـ) 45 (د) 50

(5) فى الشكل التالى :



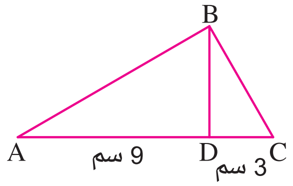
إذا كان محيط المثلث ABC يساوى 24 سم

فما محيط المثلث EBD ؟

(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(جـ) 24 سم (د) 48 سم

(6) فى الشكل التالى :



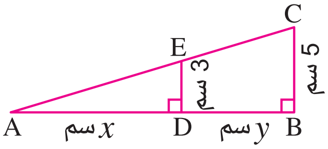
إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ فما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 6 سم (ب) $3\sqrt{3}$ سم

(جـ) 9 سم (د) $2\sqrt{3}$ سم

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

7 فى الشكل التالى :

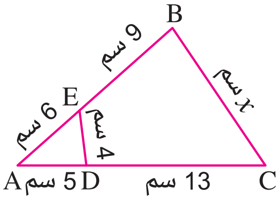


ما النسبة التى تساوى $\frac{x}{y}$ ؟

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{3}$

(جـ) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{3}{2}$

8 فى الشكل التالى :



ما قيمة x ؟

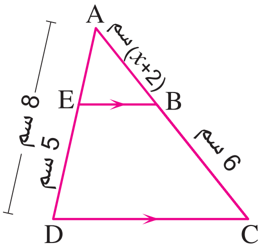
(أ) 12 (ب) 8

(جـ) 16 (د) 24

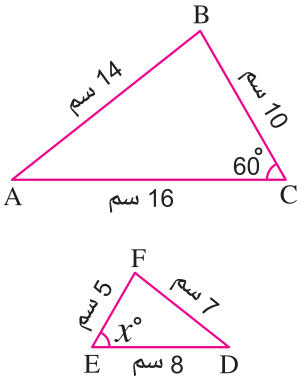
ثانيًا تطبيق المفاهيم

9 فى كل مما يأتى أثبت أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد قيمة x :

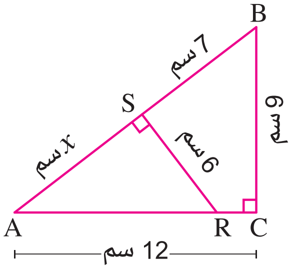
1 Δ ADC , Δ AEB



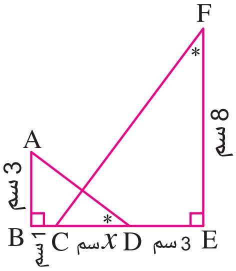
2 Δ ABC , Δ DFE



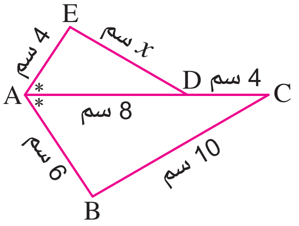
3 Δ ABC , Δ ARS



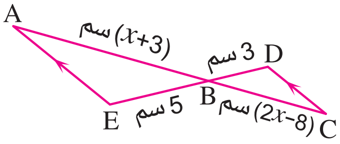
4 Δ ABD , Δ CEF



5 Δ ABC , Δ AED



6 Δ AEB , Δ CDB

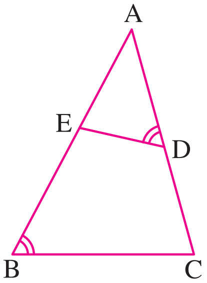


10 فى الشكل المقابل :

$D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$, m ($\angle$ ADE) = m ($\angle$ B)

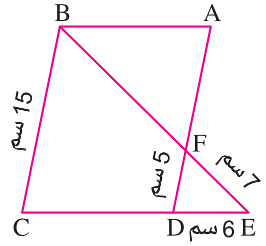
أثبت أن : Δ ABC $\sim$ Δ ADE

ثم أثبت أن AB × AE = AC × AD



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

(11) فى الشكل التالى :

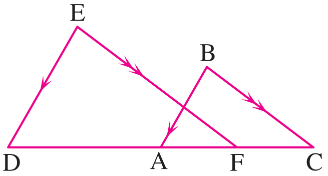


ABCD متوازى أضلاع ، $E \in \overrightarrow{CD}$

أثبت أن $\Delta ABF \sim \Delta DEF$

وأوجد محيط ΔABF

(13) فى الشكل التالى :



$\overline{AB} // \overline{DE}$ ، $\overline{BC} // \overline{EF}$

النقط C ، F ، A ، D على استقامة واحدة

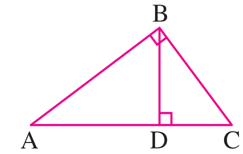
أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

وإذا كان $BC : EF = 2 : 3$

ومحيط المثلث ABC = 24 سم

فأوجد محيط المثلث DEF

(12) فى الشكل التالى :



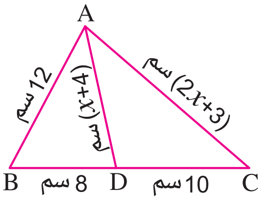
ABC مثلث فيه $m(\angle ABC) = 90°$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

أثبت أن : $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

وإذا كان : BD = 4.8 سم ، AD = 6.4 سم

فأوجد طول $\overline{DC}$

(14) فى الشكل التالى :



$D \in \overline{BC}$

إذا كان : AB = 12 سم ، BD = 8 سم ، DC = 10 سم

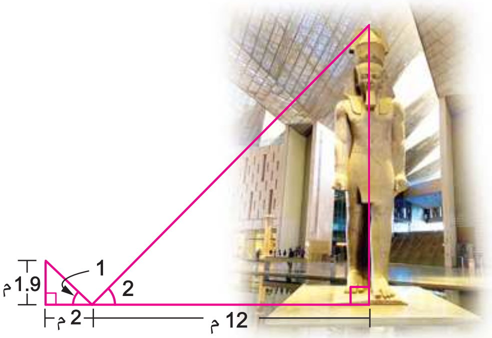
أثبت أن : $\Delta ABD \sim \Delta CBA$

ثم أوجد قيمة x

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(15) **سياحة :** أراد رجل معرفة طول تمثال رمسيس الثانى بالمتحف المصرى الكبير، فوضع مرآة فى وضع أفقى على الأرض على بعد 12 مترًا من قدم التمثال ورجع إلى الخلف حتى استطاع مشاهدة رأس التمثال فى المرآة فكانت المسافة التى رجعها للخلف 2 متر فإذا كان طول الرجل 1.9 متر

وإذا علمت أن : $m(\angle 1) = m(\angle 2)$ فما ارتفاع التمثال ؟



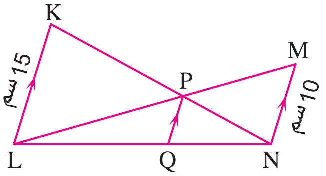
تفكير إبداعى

(16) فى الشكل المقابل :

$\overline{KL} // \overline{PQ} // \overline{MN}$

إذا كان : KL = 15 سم ، MN = 10 سم

أوجد : طول $\overline{PQ}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لتشابه المثلثات ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

3 - 3

التمدد
(Dilation)

▪ نواتج التعلم
- تعرف مفهوم التمدد.
- تعرف التمدد الموجب.
- تستخدم الإحداثيات فى تكبير أو تصغير شكل معلوم.

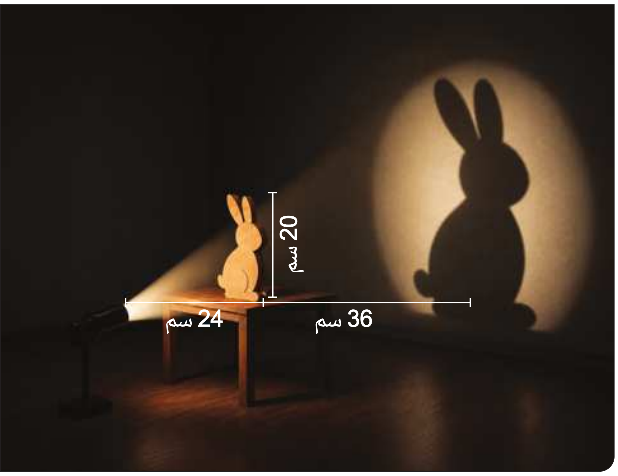
▪ المفـردات
- التمدد — Dilation
- مركز التمدد — Center of dilation
- معامل التمدد — Dilation factor
- تكبير — Enlargement
- تصغير — Reduction

▪ لاحظ أن
سوف نكتفى بدراسة التمدد بمعامل تمدد موجب فقط.

استعـد !

عنـد وضـع جسـم معتـم بيـن مصـدر ضـوء وحائـط تتكـون صـورة للجسـم علـى الحائـط، وتتغيـر أبعادهـا كلمـا اقتـرب الجسـم أو ابتعـد عـن مصـدر الضـوء.

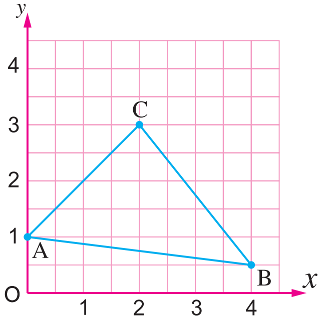
فـى الصـورة مجسـم علـى شـكل أرنـب طولـه 20 سـم يبعـد 24 سـم عـن مصـدر الضـوء، 36 سـم عـن الحائـط، فمـا طـول الأرنـب فـى الصـورة ؟



فـى هـذا الـدرس سـوف تتعلـم مفهـوم التمـدد؛ ممـا سـيمكنك مـن حـل مثـل هـذه المشـكلات الحياتيـة.

فكـر وناقـش !

استخدم هانى أحد البرامج الهندسية فى رسم المثلث ABC ، فإذا أراد تكبيره بنسبة 1 : 2 فأى مما يأتى هى إحداثيات رؤوس المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بهذا التكبير ؟



$A'(0, 2)$	$A'(2, 3)$
$B'(8, 1)$	$B'(6, 2.5)$
$C'(4, 6)$	$C'(4, 5)$

تعلـم !

مفهوم التمدد

- التمدد هو تحويل هندسى يكبر الشكل أو يصغره بنسبة محددة، هى نسبة أحد أطوال صورة الشكل إلى الطول المناظر له فى الشكل الأصلى، وتُسمى هذه النسبة معامل التمدد.
- الشكل وصورته بالتمدد يكونان متشابهين، أى لا تتغير قياسات الزوايا المتناظرة فيهما، بينما تتغير أطوال الأضلاع المتناظرة بنسبة ثابتة.

تعريف التمدد

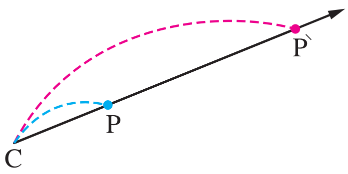
التمدد الذى مركزه C ومعامله يساوى k هو تحويل هندسى يحول كل نقطة P فى المستوى إلى نقطة P' ، بحيث تكون له الخواص التالية :

1. النقطة C هى صورة نفسها.
2. إذا كانت : P لا تنطبق على C ، $\overline{CP}$ لا تطابق $\overline{CP'}$ فإن : $CP' = k\,(CP)$

التمدد يكون تكبيرًا إذا كان : $k > 1$ ، ويكون تصغيرًا إذا كان : $0 < k < 1$

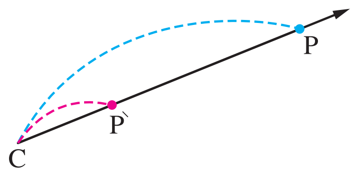
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

النقطة $P^{`}$ هى صورة النقطة P بتمدد مركزه C، ومعامله k



$k = \frac{CP^{`}}{CP} > 1$

تكبير

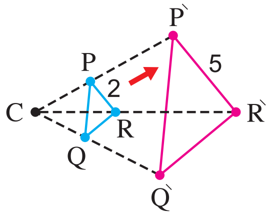


$k = \frac{CP^{`}}{CP} < 1$

تصغير

لاحظ فى التكبير أن $P \in \overline{CP^{`}}$، بينما فى التصغير تكون $P^{`} \in \overline{CP}$

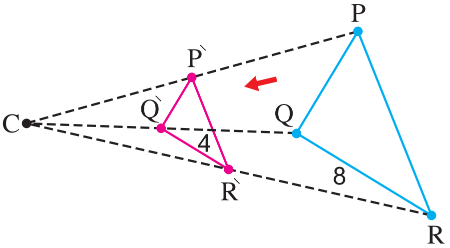
أمثلة :



$\Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$ صورة $\Delta\, PRQ$

بتمدد مركزه C، ومعامله $k = \frac{5}{2}$

لاحظ أن : $\Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$ تكبير $\Delta\, PRQ$



$\Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$ صورة $\Delta\, PRQ$

بتمدد مركزه C، ومعامله $k = \frac{1}{2}$

لاحظ أن : $\Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$ تصغير $\Delta\, PRQ$

فى كل من الشكلين :

1 $\Delta\, PRQ \sim \Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$

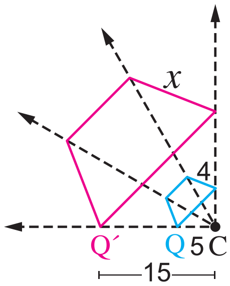
2 كل ضلع من أضلاع $\Delta\, P^{`}R^{`}Q^{`}$ يوازى نظيره فى $\Delta\, PRQ$

مثال 1

فى الشكل المقابل :

حدد ما إذا كان التمدد الذى مركزه C ويحول Q إلى $Q^{`}$ تكبيرًا أم تصغيرًا.

ثم أوجد معامل التمدد، وأوجد قيمة x



$\because Q \in \overline{CQ^{`}}$

$\therefore$ التمدد الذى يحول Q إلى $Q^{`}$ هو تكبير معامله k

$\therefore k = \frac{CQ^{`}}{CQ} = \frac{15}{5} = 3$

$\therefore \frac{x}{4} = 3$

$\therefore x = 4 \times 3 = 12$

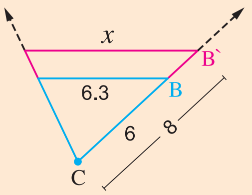
■ **لاحظ أن**

معامل التمدد k يساوى كلًا من :

- $\frac{\text{طول ضلع فى الصورة}}{\text{طول الضلع المناظر له فى الأصل}}$
- $\frac{\text{بعد صورة نقطة عن مركز التمدد}}{\text{بعد نفس النقطة عن مركز التمدد}}$

■ **تقييم ذاتى** 1

فى الشكل التالى :



حدد ما إذا كان التمدد الذى مركزه C ويحول B إلى $B^{`}$ تكبيرًا أم تصغيرًا.
ثم أوجد معامل التمدد،
وأوجد قيمة x

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

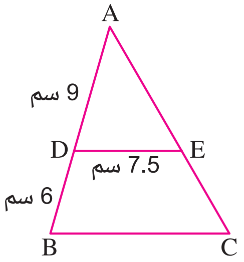
مثال 2

فى الشكل المقابل :

Δ ADE صورة Δ ABC بتمدد مركزه A

أوجد معامل التمدد وأثبت أن : $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

ثم أوجد طول $\overline{BC}$



$\because$ Δ ADE صورة Δ ABC بتمدد مركزه A

$\therefore$ D صورة B

$\because \frac{AD}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ معامل التمدد $k = \frac{3}{5}$

$\because$ $\overline{DE}$ صورة $\overline{BC}$ بالتمدد $\therefore \overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

$\because \frac{DE}{BC} = k$ $\therefore \frac{7.5}{BC} = \frac{3}{5}$

$\therefore BC = \frac{5 \times 7.5}{3} = 12.5$

$\therefore$ طول $\overline{BC} = 12.5$ سم

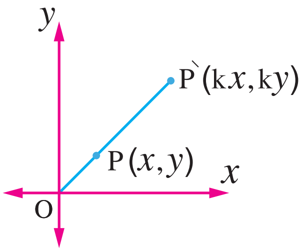
التمدد فى المستوى الإحداثى

لأى نقطة $P(x , y)$ فى المستوى الإحداثى،

صورة النقطة P بتمدد مركزه نقطة الأصل $O(0 , 0)$

ومعامله k هى النقطة $P`(kx , ky)$

قاعدة التمدد : $(x , y) \longrightarrow (kx , ky)$



مثال 3

ارسم فى المستوى الإحداثى ΔABC الذى رؤوسه $A(1 , 3)$ ، $B(2 , -1)$ ، $C(5 , 0)$

وارسم صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله 2

تستخدم قاعدة التمدد فى المستوى الإحداثى

لإيجاد صورة كل نقطة من النقط

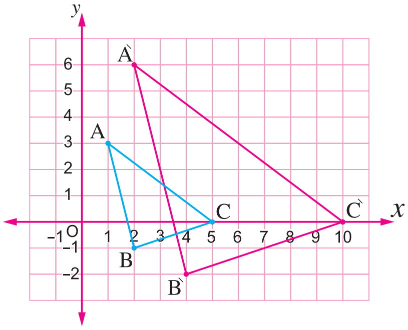
A ، B ، C بتمدد مركزه O ومعامله $k = 2$

$(x , y) \longrightarrow (2x , 2y)$

$A(1 , 3) \longrightarrow A`(2 , 6)$

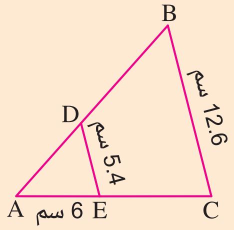
$B(2 , -1) \longrightarrow B`(4 , -2)$

$C(5 , 0) \longrightarrow C`(10 , 0)$



تقييم ذاتى (2)

فى الشكل التالى :



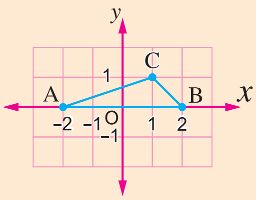
Δ ADE صورة Δ ABC

بتمدد مركزه A

أوجد معامل التمدد وأثبت أن :

$\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ وأوجد طول $\overline{AC}$

تقييم ذاتى (3)



استخدم المستوى الإحداثى

السابق فى إيجاد صورة

ΔABC بتمدد مركزه O

ومعامله 2

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

■ **لاحظ من المثال السابق أن :**

$\Delta A`B`C`$ صورة ΔABC بتمدد معامله = 2 لذلك فإن :

1. $\Delta A`B`C` \sim \Delta ABC$
2. $k > 1$ لذلك المثلث $A`B`C`$ تكبير للمثلث $ABC$، وكل ضلع من أضلاع المثلث $A`B`C`$ طوله يساوى ضعف طول الضلع المناظر له فى المثلث ABC
3. كل ضلع من أضلاع $\Delta A`B`C`$ يوازى نظيره فى ΔABC

مثال 4

ارسم فى المستوى الإحداثى المضلع ABCD الذى رؤوسه

$A(-3, 6)$ ، $B(0, 6)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-3, -3)$

ثم ارسم صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله $k = \frac{1}{3}$

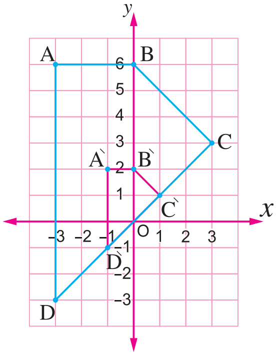
$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right)$$

$A(-3, 6) \longrightarrow A`(-1, 2)$

$B(0, 6) \longrightarrow B`(0, 2)$

$C(3, 3) \longrightarrow C`(1, 1)$

$D(-3, -3) \longrightarrow D`(-1, -1)$



■ **لاحظ من المثال السابق أن :**

$0 < k < 1$ لذلك المضلع $A`B`C`D`$ تصغير للمضلع ABCD

■ **تقييم ذاتى** (4)

ارسم فى المستوى الإحداثى ΔABC الذى رؤوسه $A(-4, 4)$ ، $B(4, 0)$ ، $C(-2, -6)$ ثم ارسم صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله $k = \frac{1}{2}$

تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) فى الشكل المقابل :

إذا كانت $P`$ صورة P بتمدد مركزه C ، فما معامل التمدد ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) 3

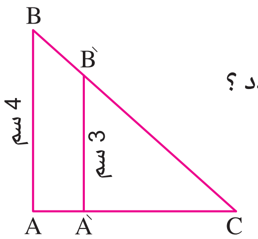
(جـ) $\frac{1}{4}$ (د) 4

(2) فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{A`B`}$ صورة $\overline{AB}$ بتمدد مركزه C ، فما معامل التمدد ؟

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$

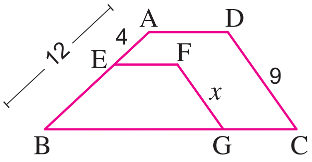
(جـ) $\frac{3}{7}$ (د) $\frac{4}{7}$



(3) إذا كان المضلع EBGF صورة المضلع ABCD بتمدد مركزه B ومعامله k فإن :

(أ) $x = 3$ ، $k = \frac{1}{3}$ (ب) $x = 6$ ، $k = \frac{2}{3}$

(جـ) $x = 6$ ، $k = \frac{1}{3}$ (د) $x = 3$ ، $k = \frac{2}{3}$



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

④ ما صورة النقطة $P(-1, 3)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 4 ؟

(أ) $P`(3, 7)$ (ب) $P`(-4, 7)$ (جـ) $P`(-4, 12)$ ( د ) $P`(-4, 3)$

⑤ ما النسبة التى تعبر عن معامل التمدد الذى مركزه نقطة الأصل O ويحول النقطة $A(6, -2)$ إلى النقطة $B(3, -1)$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{3}$

⑥ إذا كانت $A`$ صورة A بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{3}{4}$ ، فما معامل التمدد الذى يجعل A صورة $A`$ ومركزه نقطة الأصل ؟

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (جـ) $\frac{3}{7}$ (د) $\frac{4}{7}$

⑦ إذا كانت $A`(12, -6)$ صورة A بتمدد مركزه نقطة الأصل وقاعدته $(x, y) \longrightarrow (\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y)$ فإن النقطة A هى ....

(أ) $(8, -4)$ (ب) $(18, -9)$ (جـ) $(-8, 4)$ (د) $(-18, 9)$

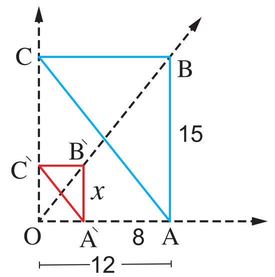
⑧ أى من النسب الآتية تمثل معامل تمدد لتصغير شكل ما ؟

(أ) 120 % (ب) $\frac{5}{4}$ (جـ) 2 (د) 50 %

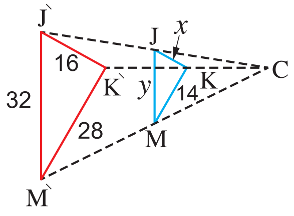
ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ فى كل من الأشكال الآتية أوجد معامل التمدد، وبيِّن ما إذا كان تكبيرًا أم تصغيرًا، وأوجد قيمة كل من x ، y :

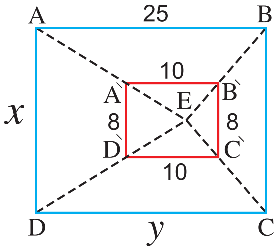
① تمدد مركزه O ويجعل $\Delta A`B`C`$ صورة ΔABC



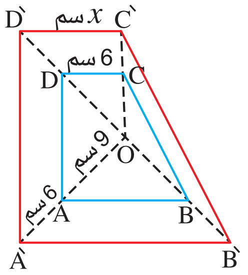
② تمدد مركزه C ويجعل $\Delta J`K`M`$ صورة ΔJKM



③ تمدد مركزه E ويجعل المضلع $A`B`C`D`$ صورة المضلع ABCD



④ تمدد مركزه O ويجعل المضلع $A`B`C`D`$ صورة المضلع ABCD



⑩ فى كل مما يأتى، ارسم فى المستوى الإحداثى المضلع وصورته بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله k حيث :

① $A(2, -1)$ ، $B(0, 3)$ ، $C(-2, 1)$ ، $k = 2$

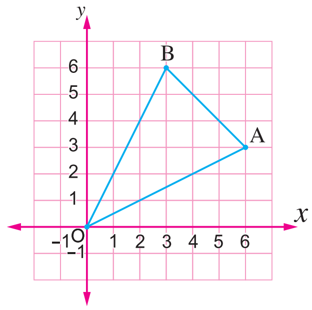
② $A(-2, -4)$ ، $B(2, 0)$ ، $C(-4, 2)$ ، $D(-6, -2)$ ، $k = 0.5$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(11) فى الشكل المقابل :

ارسم صورة $\Delta\, OAB$ بتمدد مركزه O

وقاعدته $(x\,, y) \longrightarrow (\frac{1}{3}x\,, \frac{1}{3}y)$



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(12) علوم :

عند فحص إحدى الحشرات تحت المجهر ظهر طول الحشرة كما هو موضح فى الصورة. إذا علمت الطول الفعلى للحشرة، فما هو معامل التمدد المستخدم ؟ اشرح استنتاجك.

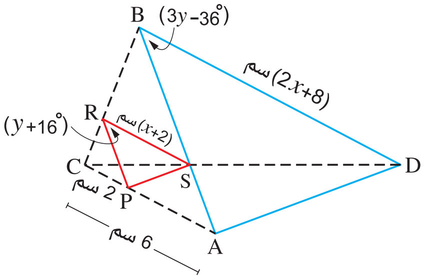
تفكير إبداعى

(13) مستطيل بعداه x سم ، y سم فما مساحة صورة المستطيل بتمدد معامله $\frac{1}{3}$ بدلالة x ، y ؟

(14) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\Delta\, PSR$ صورة $\Delta\, ADB$

بتمدد مركزه C فأوجد قيمة كل من x ، y



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للتمدد ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الدرس

4 - 3

النسب المثلثية للزاوية الحادة
(Trigonometric Ratios of Acute Angle)

■ نواتج التعلم

- تعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.
- تعين جيب الزاوية (sin)
- تعين جيب تمام الزاوية (cos)
- تعين ظل الزاوية (tan)
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة في تعيين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفـردات

- جيب الزاوية Sine
- جيب تمام الزاوية Cosine
- ظل الزاوية Tangent

■ الترميز فى الرياضيات

- تستخدم بعض الحروف اليونانية للإشارة إلى الزوايا، مثل : الحرف "θ" ويُقرأ "ثيتا"، والحرف "β" ويُقرأ "بيتا".
- "الزاوية θ" تُكتب اختصارًا للعبارة "الزاوية التى قياسها θ"

■ لاحظ أن

من التعريف المجاور لاحظ أن :

$\sin\theta \div \cos\theta = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c}$

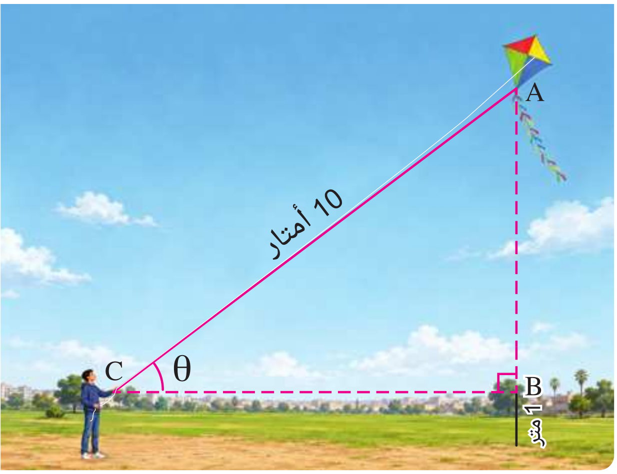
$= \frac{a}{c} \times \frac{c}{b}$

$= \frac{a}{b} = \tan\theta$

أى أن :

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

استعد !



تُعد الطائرة الورقية من أقدم الاختراعات فى الصين، حيث أستخدمت منذ أكثر من ألفى عام فى الألعاب والاحتفالات.

فى الشكل المقابل : إذا كان $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ وكان طول الخيط 10 أمتار، فما ارتفاع الطائرة الورقية عن سطح الأرض؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية واستخدامها فى حساب أطوال الأضلاع؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

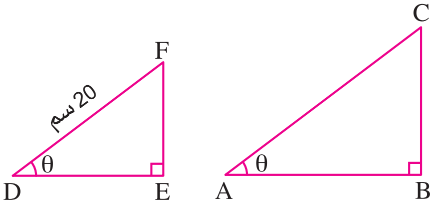
فكر وناقش !

فى الشكل المقابل :

$AB : CB = 4 : 3$

أى مما يلى هو طول $\overline{FE}$ ؟

16 سم 12 سم 9 سم

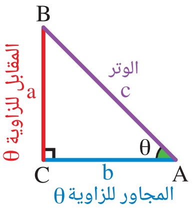


تعلم !

النسب المثلثية

النسبة المثلثية هى نسبة بين طولى ضلعين فى المثلث القائم الزاوية.

- جيب الزاوية θ (sin θ)
- جيب تمام الزاوية θ (cos θ)
- ظل الزاوية θ (tan θ)

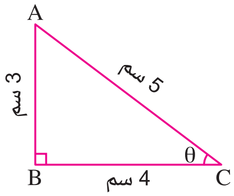


$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

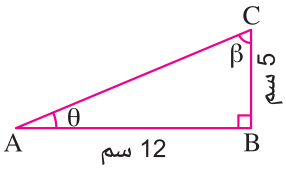
$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 1

فى الشكل المقابل :

أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين θ ، β

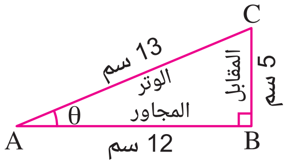


$\because m(\angle B) = 90^\circ$

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2$

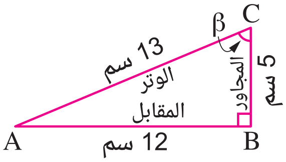
$\therefore (AC)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore AC = \sqrt{169} = 13$



$\therefore$ النسب المثلثية للزاوية θ :

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ ، $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ، $\tan\theta = \frac{5}{12}$



النسب المثلثية للزاوية β :

$\sin\beta = \frac{12}{13}$ ، $\cos\beta = \frac{5}{13}$ ، $\tan\beta = \frac{12}{5}$

لاحظ أن

فى مثال (1) :

$\sin\theta = \cos\beta = \frac{5}{13}$ ، $\cos\theta = \sin\beta = \frac{12}{13}$

وبصفة عامة :

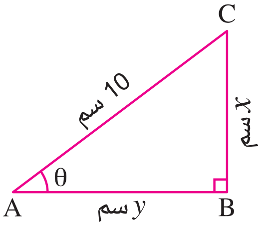
لأى زاويتين متتامتين β , θ يكون $\boxed{\cos\theta = \sin\beta}$ ، $\boxed{\sin\theta = \cos\beta}$

مثال 2

فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد قيمة كل من x ، y

ثم أوجد قيمة : $\sin^2\theta + \cos^2\theta - \tan\theta$



$\because \sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\sin\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{x}{10}$

$\therefore \frac{x}{10} = \frac{3}{5}$ ، $\therefore x = \frac{10 \times 3}{5} = 6$

ومن نظرية فيثاغورس :

$AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$ ، $\therefore AB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ، $\therefore y = 8$

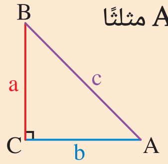
$\because \cos\theta = \frac{AB}{AC}$ ، $\therefore \cos\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\because \tan\theta = \frac{BC}{BA}$ ، $\therefore \tan\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta - \tan\theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

تذكر نظرية فيثاغورس

إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية فى C

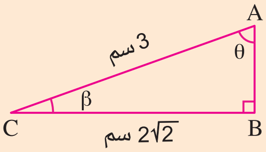


فإن : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

تقييم ذاتى 1

فى الشكل التالى :

ABC مثلث قائم الزاوية فى B



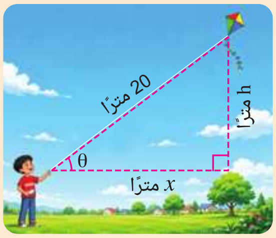
أوجد :

النسب المثلثية لكل من الزاويتين θ ، β

تقييم ذاتى 2

فى الشكل التالى :

طائرة ورقية مربوطة بخيط طوله 20 مترًا، يميل على الأفقى بزاوية θ بحيث $\sin\theta = \frac{3}{5}$

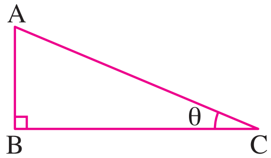


أوجد قيمة كل من x ، h

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة معلوم إحدى نسبها المثلثية

مثال 3



فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\cos\theta = \frac{12}{13}$ فأوجد : $\sin\theta$ ، $\tan\theta$

وإذا كان طول $\overline{BC} = 24$ سم فأوجد طول كل من $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$

$\because \cos\theta = \frac{12}{13}$ $\qquad \therefore \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

وبفرض أن :

$BC = 12\,k \quad , \quad AC = 13\,k$

من نظرية فيثاغورس :

$\therefore AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2} = \sqrt{(13\,k)^2 - (12\,k)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{169\,k^2 - 144\,k^2} = \sqrt{25\,k^2} = 5\,k$

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5\,k}{13\,k} = \frac{5}{13} \quad , \quad \tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5\,k}{12\,k} = \frac{5}{12}$

عند $BC = 24$ سم :

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC}$ $\qquad \therefore \frac{24}{AC} = \frac{12}{13}$ $\qquad \therefore AC = \frac{24 \times 13}{12} = 26$

$\because \tan\theta = \frac{AB}{BC}$ $\qquad \therefore \frac{AB}{24} = \frac{5}{12}$

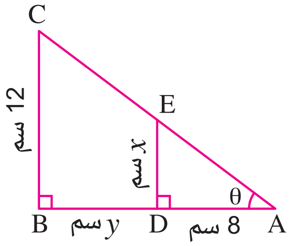
$\therefore AB = \frac{24 \times 5}{12} = 10$

$\therefore$ طول $\overline{AC} = 26$ سم ، طول $\overline{AB} = 10$ سم

■ تنوع الاستراتيجيات

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

مثال 4



فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\tan\theta = \frac{3}{4}$

فأوجد قيمة كل من x ، y

$\because \Delta ADE$ فيه : $m(\angle ADE) = 90°$

$\therefore \tan\theta = \frac{ED}{AD}$ $\qquad , \because \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$ $\qquad \therefore x = \frac{8 \times 3}{4} = 6$

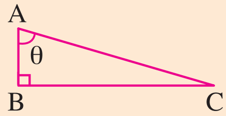
$\because \Delta ABC$ فيه : $m(\angle B) = 90°$

$\therefore \tan\theta = \frac{CB}{AB}$ $\qquad \therefore \frac{12}{y + 8} = \frac{3}{4}$

$\therefore y + 8 = \frac{4 \times 12}{3} = 16$ $\qquad \therefore y = 16 - 8 = 8$

■ تقييم ذاتى 3

فى الشكل التالى :



إذا كانت $\tan\theta = \frac{24}{7}$

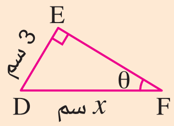
فأوجد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$

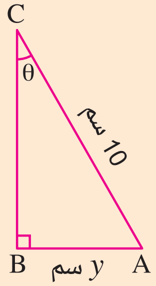
وإذا كان طول $\overline{AC} = 12.5$ سم

فأوجد طول كل من $\overline{BC}$ ، $\overline{AB}$

■ تقييم ذاتى 4

فى الشكل التالى :





إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$

فأوجد قيمة كل من x ، y

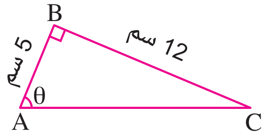
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل المقابل :

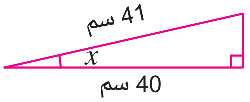


ما قيمة $\sin \theta$ ؟

(أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{12}{13}$

(جـ) $\frac{5}{13}$ (د) $\frac{12}{5}$

(2) فى الشكل المقابل :



ما قيمة $\tan X$ ؟

(أ) $\frac{40}{41}$ (ب) $\frac{9}{41}$

(جـ) $\frac{9}{40}$ (د) $\frac{40}{9}$

(3) إذا كانت : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ما قيمة $\tan \theta$ ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(4) إذا كان : A ، B قياسى زاويتين متتامتين وكان : $\sin A = \frac{12}{13}$ فما قيمة $\cos B$ ؟

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$

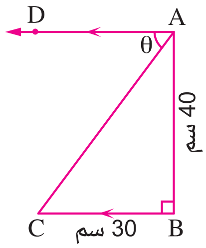
(جـ) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{13}{12}$

(5) فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B إذا كان : $26\ AB = 10\ AC$ فما قيمة $\tan C$ ؟

(أ) $\frac{12}{5}$ (ب) $\frac{5}{12}$

(جـ) $\frac{12}{13}$ (د) $\frac{5}{13}$

(6) فى الشكل المقابل :

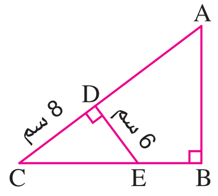


ما قيمة $\cos \theta$ ؟

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{3}{5}$

(جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

(7) فى الشكل المقابل :

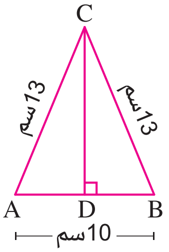


ما قيمة $\sin A$ ؟

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$

(جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

(8) فى الشكل المقابل :



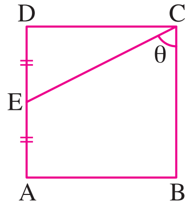
ما قيمة $\sin B$ ؟

(أ) $\frac{5}{13}$ (ب) $\frac{12}{13}$

(جـ) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$

(9) فى الشكل التالى :

ABCD مربع، E منتصف $\overline{AD}$ ما قيمة $\tan \theta$ ؟

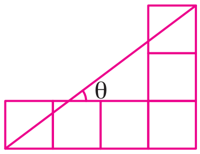


(أ) 2 (ب) $\frac{1}{2}$

(جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{4}$

(10) فى الشكل التالى :

6 مربعات متطابقة فما قيمة $\sin \theta$ ؟

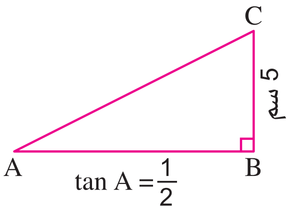


(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$

(جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{5}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

◂ **اكتشف الخطأ :**



(11) قام كل من وائل وسارة بحساب طول كل من $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$

فكانت إجابتاهما كما يلى ، فأى منهما أوجد الأطوال بطريقة صحيحة ؟

حل وائل :

$\because \tan A = \frac{CB}{AB}$ $\quad \therefore \frac{5}{AB} = \frac{1}{2}$

$\therefore AB = 2 \times 5 = 10$

$\therefore AC = \sqrt{(5)^2 + (10)^2} = 5\sqrt{5}$

$\therefore$ طول $\overline{AB} = 10$ سم ، طول $\overline{AC} = 5\sqrt{5}$ سم

حل سارة :

$\because \tan A = \frac{AB}{BC}$ $\quad \therefore \frac{AB}{5} = \frac{1}{2}$

$\therefore AB = \frac{5}{2} = 2.5$

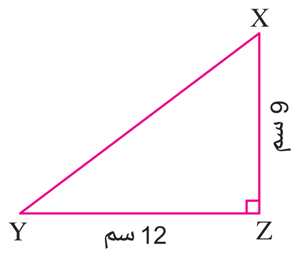
$\therefore AC = \sqrt{(5)^2 + (2.5)^2} = 2.5\sqrt{5}$

$\therefore$ طول $\overline{AB} = 2.5$ سم ، طول $\overline{AC} = 2.5\sqrt{5}$ سم

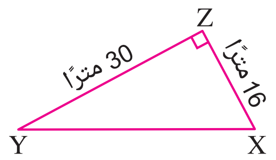
ثانيًا تطبيق المفاهيم

(12) فى كل مما يأتى أوجد : sin X , cos X , tan X , sin Y , cos Y , tan Y :

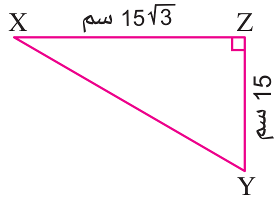
(1)



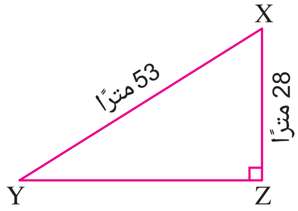
(2)



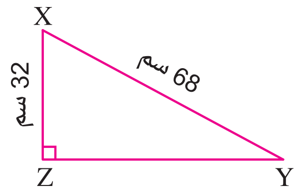
(3)



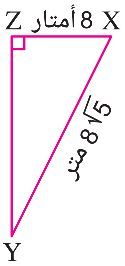
(4)



(5)



(6)



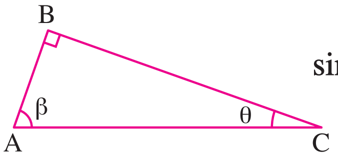
(13) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\sin \theta = \frac{1}{3}$

فأوجد :

(1) $\cos \theta$ (2) $\tan \theta$

(3) $\cos \beta$ (4) $\tan \beta$

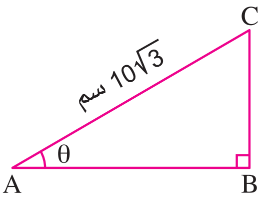


(14) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

فأوجد طول كل من :

$\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

(15) فى الشكل المقابل :

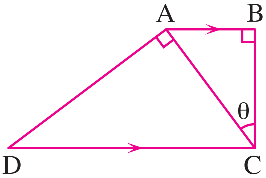
$ABCD$ شكل رباعى فيه

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ،

$m(\angle B) = m(\angle CAD) = 90°$

طول $\overline{AD} = 16$ سم فإذا كانت :

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ فأوجد طول $\overline{DC}$



(16) فى الشكل المقابل :

ABC مثلث فيه

$m(\angle B) = 90°$

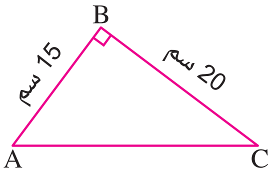
وطول $\overline{AB} = 15$ سم

وطول $\overline{BC} = 20$ سم أثبت كلًا مما يأتى :

(1) $\tan A \times \tan C = 1$

(2) $\sin^2 A + \sin^2 C = 1$

(3) $\cos A \cos C - \sin A \sin C = 0$



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(17) فى الشكل التالى :

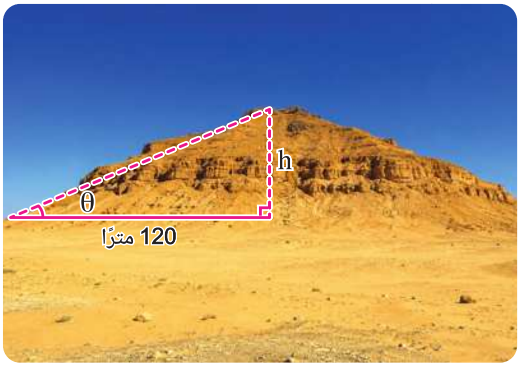
أوجد كلًا من :

$\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta$

(18) فى الشكل التالى :

إذا كانت : $\sin\theta = \frac{5}{13}$

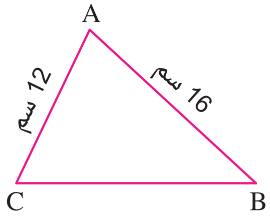
فأوجد ارتفاع الجبل (h) بالمتر.



تفكير إبداعى

(19) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ABC مثلثًا حاد الزوايا أوجد قيمة : $\frac{\sin C}{\sin B}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للنسب المثلثية للزاوية الحادة ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الدرس 3 - 5

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
(Trigonometric Ratios of Some Special Angles)

▪ نواتج التعلم

- تعرف النسب المثلثية للزوايا الخاصة (°30 , °60 , °45).
- تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزاوية معلوم قياسها.
- توجد قياس الزاوية إذا عُلمت إحدى نسبها المثلثية باستخدام الآلة الحاسبة.
- تستخدم النسب المثلثية فى حل مشكلات حياتية.

▪ المفردات

- الزوايا الخاصة
Special angles

▪ فكر مع زملائك

- فى المثلث الثلاثينى ستينى إذا كان طول الضلع المقابل للزاوية °30 هو 1 سم فكيف يمكنك استنتاج طول الوتر وطول الضلع المقابل للزاوية °60 ؟
- فى المثلث القائم الزاوية ، وإحدى زواياه الحادة °45 إذا كان طول أحد ضلعى القائمة 1 سم فكيف يمكن استنتاج طولى الضلعين الآخرين ؟

استعد !

إحدى المسلات المصرية

المسلات المصرية القديمة هى عبارة عن أبراج حجرية عالية تزين المعابد ، قاعدتها تأخذ شكلًا رباعيًا ويعلوها رأس هرمى صغير ، وكانت تُعد أول ساعة شمسية حيث كان المصرى القديم يراقب الظل الذى تلقيه المسلة على الأرض ويتحرك الظل ويتغير طوله واتجاهه فيشير إلى أجزاء اليوم المختلفة .

فإذا كانت أشعة الشمس تصنع زاوية قياسها °45 مع سطح الأرض، فكم يكون طول ظل المسلة التى ارتفاعها 40 مترًا ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية حساب النسب المثلثية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

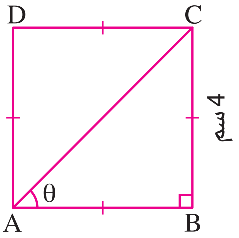
فكر وناقش !

فى الشكل المقابل :

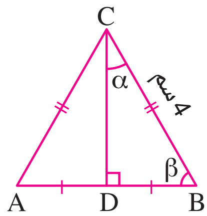
ما قيمة θ فى المربع ؟

وما قيمة كل من α ، β فى المثلث ؟

هل يمكنك التعرف على النسب المثلثية الثلاث لكل من θ ، β ، α ؟



ABCD مربع

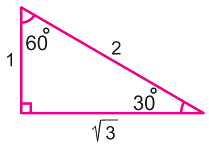
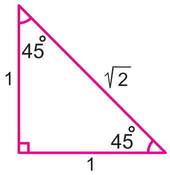


ABC مثلث متساوى الأضلاع

تعلم !

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

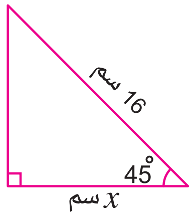
يمكن استخدام المثلث القائم الزاوية الذى قياسات زواياه (°90 , °60 , °30) ، والمثلث القائم الزاوية الذى قياسات زواياه (°90 , °45 , °45) لاستنتاج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مثل °30 ، °60 ، °45 كما يلى :

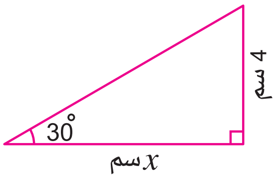
المثلث	الجيب (sin)	جيب التمام (cos)	الظل (tan)
	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

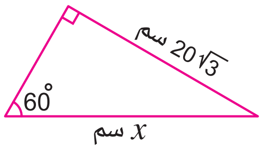
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 1

أوجد قيمة x فى كل من الأشكال الآتية :

1


2


3


1

$\because \cos 45° = \frac{x}{16}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{16}$

$\therefore x = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$

2

$\because \tan 30° = \frac{4}{x}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{x}$

$\therefore x = 4\sqrt{3}$

3

$\because \sin 60° = \frac{20\sqrt{3}}{x}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{x}$

$\therefore x = 40$

استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد النسب المثلثية

إيجاد النسب المثلثية لأى زاوية معلوم قياسها باستخدام الآلة الحاسبة باستخدام المفاتيح :

sin ، cos ، tan

مثال 2

باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب أربعة أرقام عشرية :

1 $\sin 42°$ 2 $\cos 15° 17'$ 3 $\tan 74° 12' 36''$

1 sin 4 2 =

$\therefore \sin 42° \approx 0.6691$

2 cos 1 5 °''' 1 7 °''' =

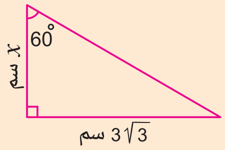
$\therefore \cos 15° 17' \approx 0.9646$

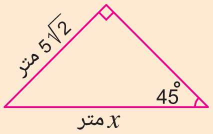
3 tan 7 4 °''' 1 2 °''' 3 6 °''' =

$\therefore \tan 74° 12' 36'' \approx 3.5363$

▪ تقييم ذاتى 1

أوجد قيمة x فى كل مما يأتى :

1


2


▪ فكر مع زملائك

متى تستخدم sin ، cos ، tan لإيجاد طول ضلع مجهول فى المثلث القائم الزاوية ؟

▪ تذكر أن

وحدات قياس الزاوية هى الدرجة والدقيقة والثانية حيث :

- الدرجة تساوى 60 دقيقة ($1° = 60'$)
- الدقيقة تساوى 60 ثانية ($1' = 60''$)

▪ تقييم ذاتى 2

باستخدام الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية :

1 $\tan 12°$

2 $\sin 32° 14'$

3 $\cos 47° 15' 39''$

▪ فكر

هل يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لكل من الزاويتين 0° ، 90° ؟

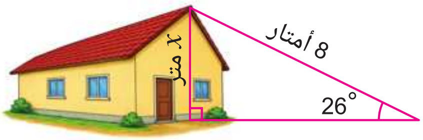
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 3

فى كل مما يأتى، أوجد قيمة X لأقرب رقمين عشريين :

1

2



1

$\because \tan 54° = \dfrac{6}{X}$

$\therefore X = \dfrac{6}{\tan 54°} \approx 4.36$

2

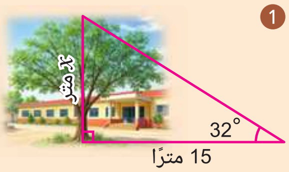
$\because \sin 26° = \dfrac{X}{8}$

$\therefore X = 8 \sin 26° \approx 3.51$

■ تقييم ذاتى 3

فى كل مما يأتى، أوجد قيمة X لأقرب رقمين عشريين :

1



2

إيجاد قياس زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية

إذا كانت θ زاوية حادة وكانت :

- $\sin \theta = X$ فإن $\theta = \sin^{-1}(X)$
- $\cos \theta = X$ فإن $\theta = \cos^{-1}(X)$
- $\tan \theta = X$ فإن $\theta = \tan^{-1}(X)$

فمثلًا : إذا كانت $\sin \theta = 0.834$ فإن θ هى الزاوية التى جيبها 0.834

ولإيجاد قياس هذه الزاوية نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع التالى :

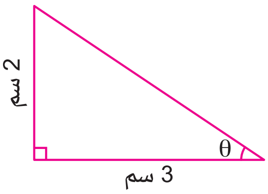
SHIFT | sin | . | 8 | 3 | 4 | = | °'''

فنجد أن قياس الزاوية يساوى تقريبًا $56° \, 30' \, 43''$

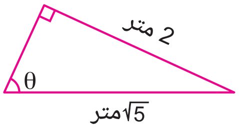
مثال 4

أوجد قيمة θ فى كل مما يأتى :

1



2



1

$\because \tan \theta = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$\therefore \theta \approx 33° \, 41' \, 24''$

2

$\because \sin \theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

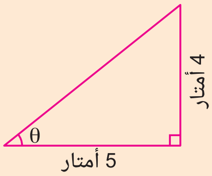
$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\therefore \theta \approx 63° \, 26' \, 6''$

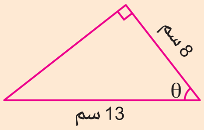
■ تقييم ذاتى 4

أوجد قيمة θ فى كل مما يأتى :

1



2



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 5

أوجد قيمة θ إذا كان :

$2\cos(\theta+20^\circ)=\tan 45^\circ$ حيث $(\theta+20^\circ)$ زاوية حادة.

$\because 2\cos(\theta+20^\circ)=\tan 45^\circ$

$\therefore 2\cos(\theta+20^\circ)=1$ $\therefore \cos(\theta+20^\circ)=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta+20^\circ=60^\circ$ $\therefore \theta=40^\circ$

مثال 6

إذا كان ABC مثلثًا فيه : $m(\angle B)=72^\circ$ ، $\sin A=\cos 2A$ حيث $(2A)$ زاوية حادة ، أوجد : $m(\angle C)$

$\because \sin A=\cos 2A$ $\therefore A+2A=90^\circ$

$\therefore 3A=90^\circ$ $\therefore A=30^\circ$

$\therefore m(\angle C)=180^\circ-(72^\circ+30^\circ)=78^\circ$

■ **تقييم ذاتى** (5)

أوجد قيمة θ إذا كان :

$\sqrt{3}\sin(\theta-16^\circ)=\sin 60^\circ$

حيث $(\theta-16^\circ)$ زاوية حادة.

■ **تقييم ذاتى** (6)

أوجد قيمة θ فى كل مما يأتى، حيث θ زاوية حادة :

1. $\sin 75^\circ=\cos\theta$
2. $\sin(\theta-20^\circ)=\cos(\theta+20^\circ)$

■ **لاحظ أن**

لأى زاويتين حادتين θ ، β

إذا كان : $\sin\theta=\cos\beta$

فإن : $\theta+\beta=90^\circ$

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان $\sin 40^\circ=\cos y$ حيث y قياس زاوية حادة فما قيمة y ؟

(أ) 30 (ب) 40 (جـ) 50 (د) 60

(2) ما قيمة $(\sin 30^\circ)^2+(\cos 30^\circ)^2$ ؟

(أ) $\sin 60^\circ$ (ب) $\sin 45^\circ$ (جـ) $\tan 45^\circ$ (د) $\cos 60^\circ$

(3) إذا كان ABC مثلثًا متساوى الساقين وقائم الزاوية فى C ، فما قيمة $\tan B$ ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) فى المثلث ABC الحاد الزوايا إذا كان : $m(\angle A)=70^\circ$ ، $\cos B=\sin B$ فما قياس $\angle C$ ؟

(أ) 65° (ب) 70° (جـ) 40° (د) 30°

(5) إذا كانت θ زاوية حادة، وكانت $\sin(\theta-10^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ فما قيمة θ ؟

(أ) 65° (ب) 55° (جـ) 45° (د) 35°

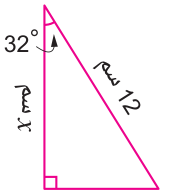
(6) إذا كانت $\sin 4\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث 4θ زاوية حادة فما قيمة θ ؟

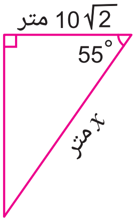
(أ) 15° (ب) 30° (جـ) 45° (د) 60°

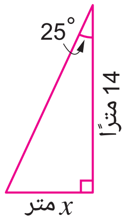
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

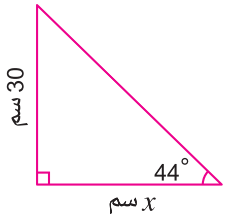
ثانيًا تطبيق المفاهيم

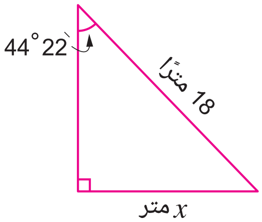
⑦ فى كل مما يأتى أوجد قيمة X لأقرب رقمين عشريين :

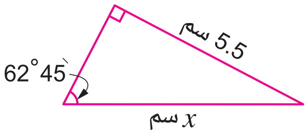
① 

② 

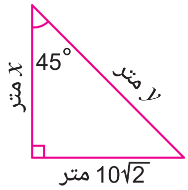
③ 

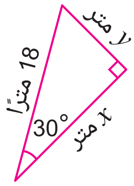
④ 

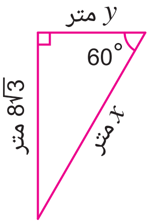
⑤ 

⑥ 

⑧ فى كل مما يأتى أوجد قيمة كل من X ، y :

① 

② 

③ 

⑨ أوجد قيمة X فى كل مما يأتى :

① $X \tan 45° \cos 30° = \tan 60°$

② $X \sin 45° \cos 45° \tan 60° = (\tan 45°)^2 - (\cos 60°)^2$

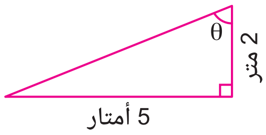
⑩ أوجد قيمة θ فى كل مما يأتى :

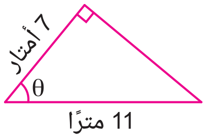
① $\cos 4\theta = \frac{1}{2}$ حيث 4θ زاوية حادة.

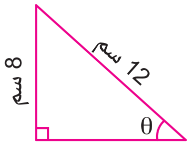
② $\tan 3\theta = \sqrt{3}$ حيث 3θ زاوية حادة.

③ $\frac{\cos 4\theta}{\sin 2\theta} = 1$ حيث 4θ زاوية حادة.

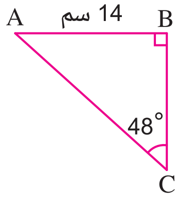
⑪ أوجد قيمة θ فى كل مما يأتى :

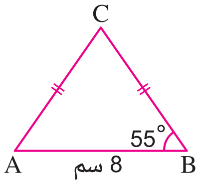
① 

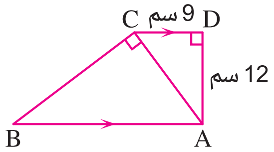
② 

③ 

⑫ فى كل مما يأتى أوجد محيط المثلث ABC لأقرب رقمين عشريين :

① 

② 

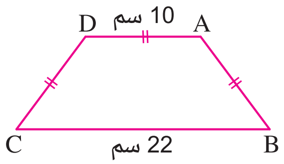
③ 

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

13) فى الشكل المقابل :

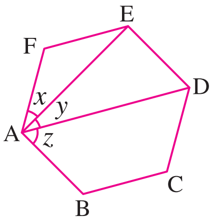
$ABCD$ شبه منحرف فيه $AB = AD = DC = 10$ سم ، $BC = 22$ سم

أوجد $m(\angle C)$ لأقرب دقيقة ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف $ABCD$



14) فى الشكل المقابل :

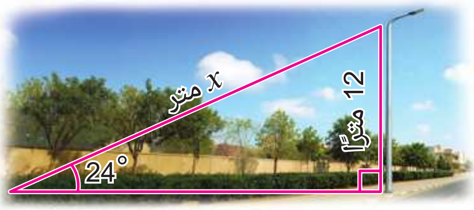
إذا كان $ABCDEF$ شكلًا سداسيًا منتظمًا، فأوجد : $2 \sin x + 4 \sin y - 6 \cos z$



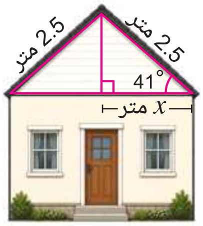
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

15) أوجد قيمة x فى كل مما يأتى لأقرب رقم عشرى :

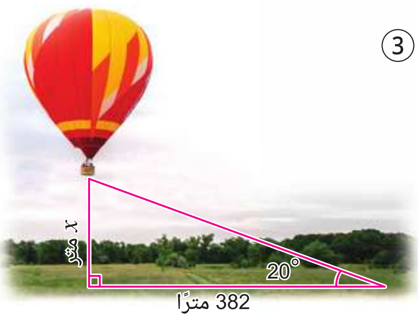
(1)



(2)



(3)

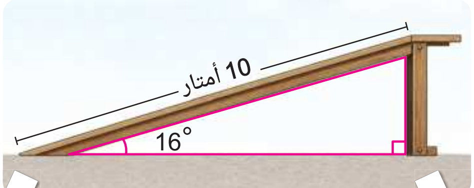


16) **رياضة :**

فى الشكل المقابل :

عند بناء منحدر للدراجات، كانت زاوية ميل المنحدر $16°$

فإذا كان طول المنحدر 10 أمتار، فما ارتفاعه ؟



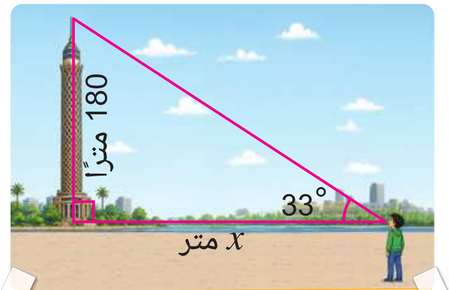
احرص على ممارسة الرياضة بانتظام؛ لأنها تساعد على الحفاظ على صحة الجسم، وتشجع على الانضباط وتنظيم الوقت.

17) **سياحة :**

فى الشكل المقابل :

إذا كان ارتفاع برج القاهرة 180 مترًا، وكان أحمد ينظر إلى قمة البرج بزاوية قياسها $33°$

فما المسافة بين أحمد وقاعدة البرج ؟



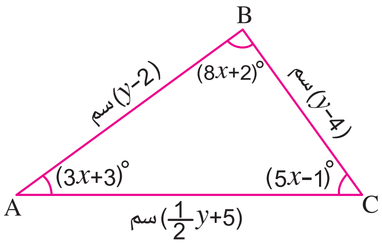
يُعد برج القاهرة أحد المعالم السياحية المهمة. تم بناؤه من الخرسانة المسلحة على شكل زهرة اللوتس المصرية.

تفكير إبداعى

18) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\sin 54° \approx 0.8$

أوجد محيط المثلث ABC



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للنسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس
3 - 6

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين
(The Relation between the Slopes of Two Parallel and Perpendicular Straight Lines)

■ نواتج التعلم

- تستنتج ميل الخط المستقيم من خلال ظل زاوية ميله.
- تعرف العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين.
- تعرف العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين.
- تحل مسائل حياتية باستخدام ميل الخط المستقيم.

■ المفردات

- ميل المستقيم
Slope of straight line
- المستقيمان المتوازيان
Two parallel straight lines
- المستقيمان المتعامدان
Two perpendicular straight lines

استعد !

فى السادس من أكتوبر من كل عام تحتفل مصر بذكرى انتصارات أكتوبر المجيدة، يوم العزة والكرامة، وتُقام فى هذه المناسبة عروض جوية مبهرة تزين سماء الوطن.

فى أحد العروض الجوية تطير الطائرات فى مسارات متوازية، فإذا كانت إحدى الطائرات تتبع مسارًا يمر بالنقطتين $(300\sqrt{3}, 401)$ ، $(100\sqrt{3}, 201)$

وكانت طائرة أخرى تتبع مسارًا يصنع زاوية موجبة θ مع الاتجاه الموجب لمحور x ، أوجد قياس زاوية θ

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

إذا رسم مجدى مستقيمين ℓ_1 ، ℓ_2 وكان المستقيم ℓ_1 يمر بالنقطتين $(5, 7)$ ، $(-1, 6)$ والمستقيم ℓ_2 يمر بالنقطتين $(4, 4-)$ ، $(3, 2)$ فأى مما يأتى صحيح ؟

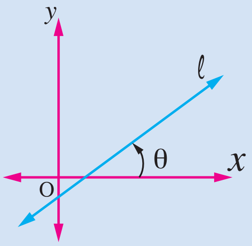
$\ell_1 // \ell_2$ | $\ell_1 \perp \ell_2$ | ℓ_1 ، ℓ_2 متقاطعان وغير متعامدين

تعلم !

زاوية ميل الخط المستقيم

زاوية ميل الخط المستقيم هى الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور x ، عند قياسها عكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الاتجاه الموجب لمحور x .

زاوية ميل الخط المستقيم $\ell = \theta$



ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم هو ظل زاوية ميل الخط المستقيم.

$m = \tan\theta$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله $45°$ هو $\tan 45°$

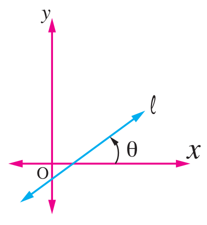
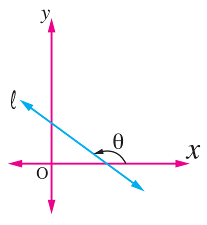
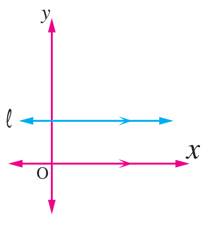
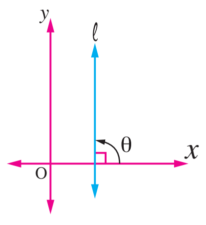
أى أن $m = \tan 45° = 1$

■ تذكر أن

ميل المستقيم (m) المار بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى بالعلاقة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ملاحظة :

الميل موجب	الميل سالب	الميل صفر	الميل غير معرف
			
$0° < \theta < 90°$ $\tan\theta > 0$	$90° < \theta < 180°$ $\tan\theta < 0$	$\theta = 0°$ $\tan\theta = 0$	$\theta = 90°$ $\tan\theta$ غير معرف

فمثلًا :

• ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله (60°) هو $(\tan 60° = \sqrt{3})$

• ميل المستقيم الذى قياس زاوية ميله (150°) هو $(\tan 150° = \frac{-\sqrt{3}}{3})$

مثال 1

أوجد قياس زاوية ميل المستقيم ℓ إذا كان :

1 ميل المستقيم ℓ يساوى $\frac{3}{7}$ 2 المستقيم ℓ يمر بالنقطتين (6 , 5) ، (7 , 4)

1 $\because m = \frac{3}{7}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

SHIFT tan 3 ÷ 7 = °'''

$\therefore \theta \approx 23°\ 11'\ 55''$

∴ قياس زاوية ميل المستقيم $\ell \approx 23°\ 11'\ 55''$

2 $\because m = \frac{6-7}{5-4} = -1$ $\therefore \theta = 180° + \tan^{-1}(-1)$

1 8 0 + SHIFT tan − 1 =

$\therefore \theta = 135°$

∴ قياس زاوية ميل المستقيم $\ell = 135°$

مثال 2

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $A(2k+1, -5)$ ، $B(-3, k)$ زاوية ميله قياسها 45° فأوجد قيمة k

∵ ميل المستقيم = $\tan 45°$

$\therefore \frac{-5-k}{2k+1+3} = \tan 45°$ $\therefore \frac{-5-k}{2k+4} = 1$ $\therefore 2k+4 = -5-k$

$\therefore 2k+k = -5-4$ $\therefore 3k = -9$ $\therefore k = -3$

■ **تذكر أن**

• ميل أى مستقيم أفقى (يوازى محور x) يساوى الصفر.

• ميل أى مستقيم رأسى (يوازى محور y) غير معرف.

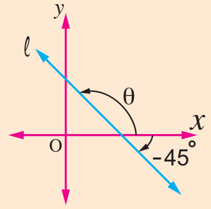
■ **تقييم ذاتى 1**

أوجد قياس زاوية ميل المستقيم ℓ إذا كان :

1 ميل المستقيم ℓ يساوى $\frac{5}{6}$

2 المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(3, -\sqrt{3})$ ، $(-1, 3\sqrt{3})$

■ **لاحظ أن**



عند استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية الميل السالب نجد أن : $\tan^{-1}(-1) = -45°$ وهو قياس الزاوية بين الاتجاه الموجب لمحور x والمستقيم عند القياس فى اتجاه عقارب الساعة وليس زاوية الميل لذلك فإن :

$\theta = 180° + \tan^{-1}(-1) = 135°$

■ **تقييم ذاتى 2**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (k , 1) ، (5 , 2k) زاوية ميله قياسها 135° أوجد قيمة k

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان ℓ_1 ، ℓ_2 مستقيمين غير رأسيين ميلاهما m_1 ، m_2 على الترتيب.

وكان $\ell_1 // \ell_2$ فإن $m_1 = m_2$

أى أن : إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين.

والعكس صحيح.

إذا كان $m_1 = m_2$ فإن $\ell_1 // \ell_2$

أى أن : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

■ لاحظ أن

أى مستقيمين رأسيين متوازيان.

مثال 3

أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين $A\ (2\ ,\ 1)$ ، $B\ (4\ ,\ -1)$ يوازى المستقيم الذى زاوية ميله قياسها $135°$

بفرض أن ميل $m_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore m_1 = \dfrac{1-(-1)}{2-4} = -1$

ميل المستقيم الثانى $m_2 =$

$\therefore m_2 = \tan 135° = -1$

$\therefore m_1 = m_2$

∴ المستقيمان متوازيان.

■ تقييم ذاتى (3)

إذا كان المستقيم ℓ_1 يمر بالنقطتين $(4\ ,\ 9)$ ، $(-1\ ,\ 2)$ والمستقيم ℓ_2 يمر بالنقطتين $(2\ ,\ -2)$ ، $(7\ ,\ 5)$ أثبت أن : $\ell_1 // \ell_2$

مثال 4

أثبت باستخدام الميل أن النقط $A\ (4\ ,\ 3)$ ، $B\ (2\ ,\ 7)$ ، $C\ (8\ ,\ -5)$ على استقامة واحدة.

بفرض أن ميل $m_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore m_1 = \dfrac{7-3}{2-4} = -2$

وبفرض أن ميل $m_2 = \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore m_2 = \dfrac{3+5}{4-8} = -2$

$\therefore m_1 = m_2$

والنقطة A مشتركة بين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$

∴ النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.

■ تقييم ذاتى (4)

إذا كانت النقط $A\ (1\ ,\ -2)$ ، $B\ (4\ ,\ k)$ ، $C\ (7\ ,\ 3k-1)$ ، تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة k

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان ℓ_1 ، ℓ_2 مستقيمين ميلاهما m_1 ، m_2 على الترتيب ولا يوازى أحدهما أحد المحورين.

وكان $\ell_1 \perp \ell_2$ فإن $m_1 \times m_2 = -1$

أى أن : حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين يساوى -1

والعكس صحيح.

إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$ فإن $\ell_1 \perp \ell_2$

أى أن : إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين يساوى -1 فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

■ لاحظ أن

- إذا كان أحد المستقيمين رأسيًا والآخر أفقيًا فإن المستقيمين متعامدان.
- إذا كان ميل المستقيم ℓ_1 هو $\dfrac{a}{b}$ (حيث $a \neq 0$) فإن ميل المستقيم ℓ_2 العمودى عليه هو $\dfrac{-b}{a}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 5

إذا كان المستقيم ℓ_1 يمر بالنقطتين (6 , 1 –) ، (2 , 5) ، والمستقيم ℓ_2 يمر بالنقطتين (8 , 6) ، (4 – , 2 –) أثبت أن $\ell_1 \perp \ell_2$

$\because m_1 = \frac{6-2}{-1-5} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$ ، $m_2 = \frac{8+4}{6+2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$\therefore m_1 \times m_2 = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$ $\quad \therefore \ell_1 \perp \ell_2$

مثال 6

أثبت أن النقط $A(0, -1)$ ، $B(-3, 2)$ ، $C(-1, 4)$ ، $D(2, 1)$ هى رؤوس مستطيل.

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2-(-1)}{-3-0} = -1$ ، ميل $\overleftrightarrow{CD} = \frac{1-4}{2-(-1)} = -1$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = ميل $\overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (1)

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{AD} = \frac{1-(-1)}{2-0} = 1$ ، ميل $\overleftrightarrow{CB} = \frac{4-2}{-1-(-3)} = 1$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AD}$ = ميل $\overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{CB}$ (2)

من (1) ، (2) ينتج أن الشكل ABCD متوازى أضلاع.

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ × ميل $\overleftrightarrow{AD} = -1 \times 1 = -1$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{AD}$

$\therefore$ الشكل ABCD مستطيل.

■ تقييم ذاتى 5

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $A(\sqrt{3}, -1)$ ، $B(3\sqrt{3}, 1)$ عمودى على المستقيم الذى زاوية ميله قياسها °120

■ تقييم ذاتى 6

إذا كانت النقط $A(6, 2)$ ، $B(4, 8)$ ، $C(-12, k)$ هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى A أوجد قيمة k

■ فكر مع زملائك

كيف تثبت أن الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع أو مستطيلًا أو معينًا أو مربعًا باستخدام ميل الخط المستقيم ؟

تقييم الدرس

أولًا قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1. إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{-2}{3}$ فما ميل $\overleftrightarrow{CD}$ ؟
   (أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{-2}{3}$ (د) $\frac{-3}{2}$

2. ما ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (3 , 6) ، (4– , 2 –) ؟
   (أ) $\frac{-7}{8}$ (ب) $\frac{7}{8}$ (جـ) $\frac{-8}{7}$ (د) $\frac{8}{7}$

3. ما ميل المستقيم الذى زاوية ميله قياسها 60° ؟
   (أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. ما ميل المستقيم العمودى على محور X ؟
   (أ) صفر (ب) 1 (جـ) 1– (د) غير معرف

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

5 إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-5}{3}$ ، $\frac{k}{6}$ متوازيين فما قيمة k ؟

(أ) 10 (ب) -10 (جـ) 5 (د) -5

6 إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية فى B وكانت $A = (2 , 4)$ ، $B = (4 , 0)$ فما ميل $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(أ) -2 (ب) 2 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{-1}{2}$

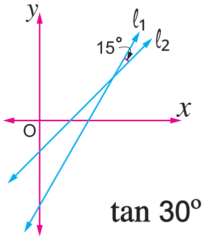
7 المربع ABCD فيه ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوى $\sqrt{3}$ فما ميل $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ب) $-\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8 المعين ABCD فيه ميل $\overleftrightarrow{BD}$ يساوى $\frac{3}{4}$ فما ميل $\overleftrightarrow{AC}$ ؟

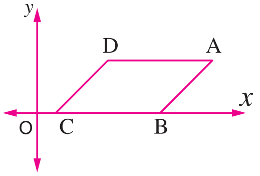
(أ) $\frac{-4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{-3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

9 فى الشكل المقابل :
إذا كان ميل المستقيم ℓ_1 يساوى $\sqrt{3}$ فما ميل المستقيم ℓ_2 ؟



(أ) $\tan 15^\circ$ (ب) $\tan 30^\circ$
(جـ) $\tan 45^\circ$ (د) $\tan 60^\circ$

10 فى الشكل المقابل :
إذا كان ABCD متوازى أضلاع وكانت A (6 , 2) ، B (4,0) فما قياس $\angle$ BCD ؟



(أ) 75° (ب) 60°
(جـ) 45° (د) 30°

ثانيًا تطبيق المفاهيم

11 أوجد ميل الخط المستقيم الذى زاوية ميله قياسها θ إذا كانت θ تساوى :

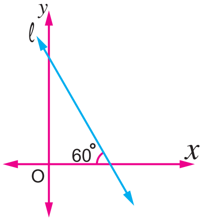
① 0° ② 30° ③ $75^\circ\ 4'\ 7''$ ④ 135°

12 أوجد قياس زاوية ميل المستقيم الذى ميله (m) إذا كانت m تساوى :

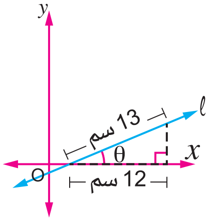
① 0.4 ② $\frac{-2}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$

13 فى كل من الأشكال الآتية أوجد ميل المستقيم ℓ:

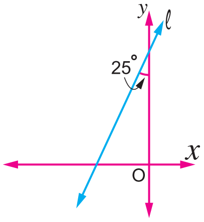
①



②



③



14 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين A (3 k , 1) ، B (1 , 2) زاوية ميله قياسها θ وكان $\tan \theta = \frac{1}{2}$ أوجد قيمة k

15 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $A(-4\sqrt{3}\ , k-6)$ ، $B(2\sqrt{3}\ , 2k+1)$ زاوية ميله قياسها 60° أوجد قيمة k

16 بين ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين ، أو متعامدين ، أو متقاطعين وغير متعامدين :

① A (−1 , −4) ، B (2 , 11) ، C (1 , 1) ، D (4 , 10)
② A (2 , 8) ، B (−1 , −2) ، C (3 , 7) ، D (0 , −3)
③ A (−3 , 3) ، B (0 , 2) ، C (1 , 3) ، D (−2 , −6)
④ A (−1 , 3) ، B (4 , 8) ، C (−6 , 0) ، D (2 , 8)

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

(17) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $A(4, -3)$ ، $B(5, -4)$ عمودى على المستقيم الذى زاوية ميله قياسها 45°

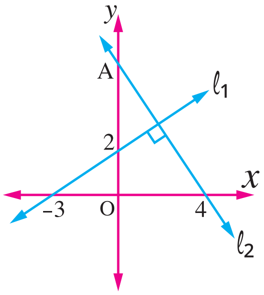
(18) إذا كانت النقط $A(1, 4)$ ، $B(5, 5)$ ، $C(13, k)$ على استقامة واحدة أوجد قيمة k

(19) أثبت أن النقط $A(6, -5)$ ، $B(4, -7)$ ، $C(3, -3)$ ، $D(5, -1)$ هى رؤوس متوازى أضلاع.

(20) أثبت أن النقط $A(3, -1)$ ، $B(5, 4)$ ، $C(3, 9)$ ، $D(1, 4)$ هى رؤوس معين.

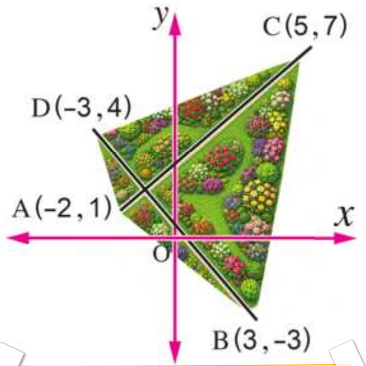
(21) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\ell_2 \perp \ell_1$ أوجد إحداثيى النقطة A



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(22) **زراعة :** حديقة رؤوسها النقط $A(-2, 1)$ ، $B(3, -3)$ ، $C(5, 7)$ ، $D(-3, 4)$ ، المساران $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ يمران بالحديقة، أثبت أن المسارين متعامدان.



زراعة الحدائق لها أهمية كبيرة فى تحسين جودة الهواء وتنقيته من التلوث، كما أنها مصدر للشعور بالراحة والبهجة.

(23) **حفريات :** رسم علماء الحفريات خريطة لديناصور باستخدام الإحداثيات المتعامدة، فكانت إحدى العظام يقع طرفاها عند النقطتين $(-5, 8)$ ، $(10, -1)$ وعظمة أخرى يقع طرفاها عند النقطتين $(-10, -3)$ ، $(-5, -6)$

هل العظمتان متوازيتان ؟

(24) فى الشكل الذى أمامك تم تمثيل القطع الخشبية لكرسى شاطئ بالخطوط ℓ_1 الذى يمر بالنقطتين $A(4, k)$ ، $B(1, 2)$ عمودى على ℓ_2 الذى يمر بالنقطتين $C(1, 4)$ ، $D(-4, 1)$ أوجد قيمة k

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للعلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

3 - 7

معادلة الخط المستقيم
(Equation of the Straight Line)

■ **نواتج التعلم**

- توجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والمقطع y.
- توجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة.
- تعرف الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم.
- تستخدم ميل الخط المستقيم والمقطع y فى تمثيل الخط المستقيم بيانيًا.
- تستخدم معادلة الخط المستقيم فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفـردات**

- معادلة الخط المستقيم Equation of straight line
- المقطع y y-intercept

■ **لاحظ أن**

معادلة المستقيم الذى ميله m ويمر بنقطة الأصل (0 ، 0) هى :

$y = mx$

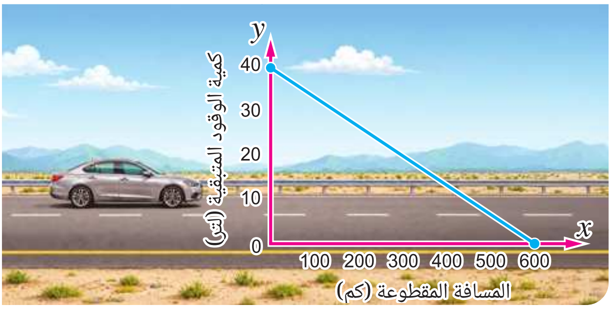
استعد !

محلات لبيع الهدايا التذكارية

تُعد محافظة الأقصر من أهم المقاصد السياحية فى العالم، حيث تضم معابد الكرنك والأقصر ووادى الملوك.
بفرض أن أحد محلات بيع الهدايا التذكارية بالقرب من معبد الأقصر سجل إيراداته السنوية فكانت العلاقة خطية بين إجمالى المبيعات (بالألف جنيه) وسنة البيع.
وفى عام 2020 بلغت المبيعات 800 ألف جنيه وتزداد بمعدل 40 ألف جنيه كل عام بسبب زيادة أعداد السياح، فهل يمكنك إيجاد المعادلة التى تعبر عن المبيعات y بدلالة سنة البيع x (باعتبار أن : $x = 0$ تمثل عام 2020 ، $x = 1$ تمثل عام 2021 ، وهكذا ...)

فى هذا الدرس سوف تتعلم الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !



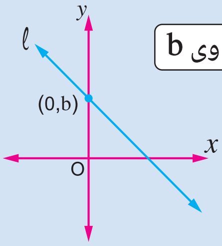
انطلق سامح بسيارته فى رحلة وكان خزان الوقود ممتلئًا بـ 40 لترًا، إذا كانت السيارة تستهلك 1 لتر من الوقود لكل 15 كم.
أى من العلاقات الآتية تمثل العلاقة بين كمية الوقود المتبقية (y) والمسافة المقطوعة (x) ؟

(أ) $y = 40 - \frac{x}{15}$ (ب) $y = 15x + 40$ (جـ) $y = x^2 - 40$

تعلم !

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله m والمقطع y



إذا قطع المستقيم ℓ محور y فى النقطة (b ، 0) فإن : المقطع y يساوى b
وتُكتب معادلة المستقيم ℓ بدلالة ميله m والمقطع y على الصورة :

$$y = mx + b$$

m : الميل ، b : المقطع y

فمثلًا : إذا كان ميل المستقيم $= \frac{4}{5}$ ، المقطع y يساوى -3
فإن معادلة هذا المستقيم هى : $y = \frac{4}{5}x - 3$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 1

اكتب معادلة الخط المستقيم فى كل مما يأتى :

1 زاوية ميل المستقيم قياسها 135° ، والمستقيم يمر بالنقطة $(0 , -4)$

2 المستقيم يمر بنقطة الأصل، وعمودى على المستقيم الذى معادلته : $y = -2x + 3$

1 $\because$ قياس زاوية ميل المستقيم 135°

$\therefore m = \tan 135^\circ = -1$

$\because$ المستقيم يمر بالنقطة $(0 , -4)$

$\therefore$ المقطع $y = -4$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى :

$y = -x - 4$

2 $\because$ المستقيم يمر بنقطة الأصل $(0 , 0)$

$\therefore$ معادلة المستقيم على الصورة :

$y = mx$

$\because$ ميل المستقيم $y = -2x + 3$ يساوى -2

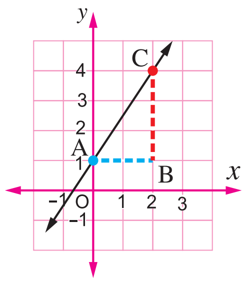
$\therefore$ ميل المستقيم العمودى $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى :

$y = \frac{1}{2}x$

مثال 2

اكتب معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{3}{2}$ ويقطع محور y فى النقطة $(0 , 1)$ ثم مثله بيانيًا باستخدام الميل ، المقطع y



$\because$ الميل $= \frac{3}{2}$ ، المقطع $y = 1$

$\therefore$ معادلة المستقيم هى : $y = \frac{3}{2}x + 1$

ولتمثيل المستقيم بيانيًا :

نمثل النقطة $A (0 , 1)$

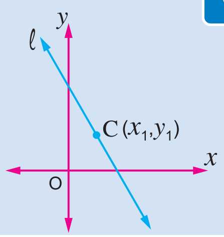
$\because$ الميل $= \frac{3}{2} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

$\therefore$ نتحرك من النقطة A أفقيًا نحو اليمين وحدتين فنصل إلى النقطة B ، ثم نتحرك رأسيًا لأعلى ثلاث وحدات فنصل إلى C ، فيكون المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هو التمثيل البيانى المطلوب.

معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله m وأى نقطة عليه

إذا كان المستقيم ℓ ميله m ، ويمر بالنقطة $C (x_1 , y_1)$

فإن معادلة المستقيم هى : $y - y_1 = m (x - x_1)$



فمثلًا إذا كان ميل المستقيم $= \frac{2}{3}$ والمستقيم يمر بالنقطة $(3 , 4)$

فإن معادلة هذا المستقيم هى : $y - 4 = \frac{2}{3} (x - 3)$

■ **تقييم ذاتى 1**

اكتب معادلة الخط المستقيم فى كل مما يأتى :

1 المستقيم يمر بالنقطة $(0 , -3)$ وظل زاوية ميله $\frac{5}{8}$

2 المستقيم يوازى المستقيم الذى معادلته $y = \frac{1}{3}x$ والمقطع $y = -4$

■ **تقييم ذاتى 2**

اكتب معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-3}{4}$ ويقطع محور y فى النقطة $(0 , 5)$ ثم مثله بيانيًا باستخدام الميل والمقطع y

■ **لاحظ أن**

1 معادلة محور x هى $y = 0$

2 معادلة محور y هى $x = 0$

3 معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_1 , y_1) ويوازى محور x هى $y = y_1$

4 معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_1 , y_1) ويوازى محور y هى $x = x_1$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مثال 3

اكتب معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5\,,\,-4)$ ، $(1\,,\,4)$ على الصورة :
$y = mx + b$

$\because m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-1}{-4-4} = \dfrac{-1}{2}$

$\because$ معادلة المستقيم الذى ميله m ويمر بالنقطة $(x_1\,,y_1)$ هى :

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$\therefore$ معادلة المستقيم هى :

$y - 1 = \dfrac{-1}{2}(x - 4)$

$\therefore y - 1 = \dfrac{-1}{2}x - \dfrac{-1}{2} \times 4$

$\therefore y - 1 = \dfrac{-1}{2}x + 2$

$\therefore y = \dfrac{-1}{2}x + 3$

■ تنوع الاستراتيجيات

بفرض أن معادلة المستقيم هى :

$y = mx + b$

$\because m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-1}{-4-4} = \dfrac{-1}{2}$

$\therefore y = \dfrac{-1}{2}x + b$

$\because$ المستقيم يمر بالنقطة $(1\,,\,4)$

$\therefore 1 = \dfrac{-1}{2}(4) + b$

$\therefore b = 3$

$\therefore$ معادلة المستقيم : $y = \dfrac{-1}{2}x + 3$

■ لاحظ أن

يمكنك استخدام النقطة $(5\,,\,-4)$ بدلًا من النقطة $(1\,,\,4)$ فى تكوين المعادلة، وتحصل على نفس الصورة لمعادلة المستقيم وهى : $y = \dfrac{-1}{2}x + 3$

الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم

$$Ax + By = C$$

حيث $A \geq 0$ ، A ، B لا يساويان الصفر معًا،

A ، B ، C أعداد صحيحة العامل المشترك الأكبر بينهم = 1

ملاحظة :

إذا كانت : $Ax + By = C$ هى الصورة القياسية لمعادلة المستقيم فإن :

• ميل المستقيم = $\dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-A}{B}$

• المقطع y يساوى $\dfrac{C}{B}$ • المقطع x يساوى $\dfrac{C}{A}$

فمثلًا : المستقيم الذى معادلته $2x + 3y = 6$

• ميله = $\dfrac{-2}{3}$ • المقطع $y = \dfrac{6}{3} = 2$ • المقطع $x = \dfrac{6}{2} = 3$

■ تقييم ذاتى 3

اكتب بصورة الميل والمقطع y معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(-7\,,\,-3)$ ، $(-2\,,\,2)$

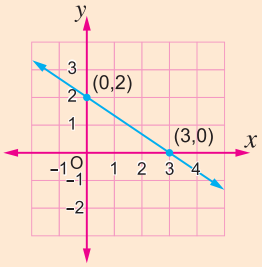
■ لاحظ أن

يمكن استخدام المقطع x والمقطع y لتمثيل المستقيم بيانيًا فمثلًا إذا كان المستقيم :

$2x + 3y = 6$

المقطع $x = 3$ ، المقطع $y = 2$

أى أن المستقيم يقطع محور x فى النقطة $(3\,,\,0)$، ويقطع محور y فى النقطة $(0\,,\,2)$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 4

اكتب الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(-4, 3)$ ، وعمودى على المستقيم الذى معادلته : $4x + y + 1 = 0$

ميل المستقيم المعلوم $= \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-4}{1} = -4$

$\therefore$ ميل المستقيم المطلوب $= \dfrac{1}{4}$

معادلة المستقيم المطلوب : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 3 = \frac{1}{4}(x - (-4))$ $\qquad$ $\therefore 4(y - 3) = x + 4$

$\therefore 4y - 12 = x + 4$ $\qquad$ $\therefore x - 4y = -16$

مثال 5

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(-9, 7)$ ، $(3, 3)$ عموديًا على المستقيم الذى معادلته : $2x + ky - 16 = 0$ أوجد قيمة k

بفرض أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-9, 7)$ ، $(3, 3)$ هو m_1

$\therefore m_1 = \dfrac{-9 - 3}{7 - 3} = -3$

بفرض أن ميل المستقيم $2x + ky - 16 = 0$ هو m_2

$\therefore m_2 = \dfrac{-2}{k}$

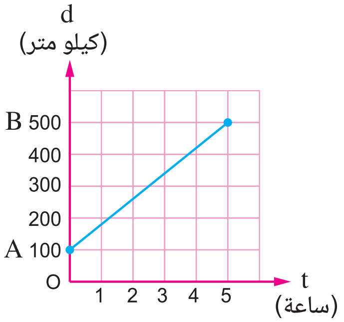
$\because$ المستقيمان متعامدان

$\therefore m_1 \times m_2 = -1$ $\qquad$ $\therefore -3 \times \dfrac{-2}{k} = -1$ $\qquad$ $\therefore k = -6$

مثال 6

الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر من نقطة ثابتة، والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة بين المدينتين A ، B أوجد :

1. مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.
2. بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.
3. معادلة الخط المستقيم الممثل للعلاقة بين المسافة والزمن.
4. المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة الأصل بعد مرور 3 ساعات من بداية الحركة.



■ تقييم ذاتى (4)

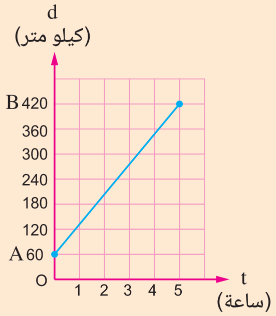
اكتب الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(5-, 2)$ ويوازى المستقيم الذى معادلته : $3x - 4y + 12 = 0$

■ تقييم ذاتى (5)

أوجد الصورة القياسية لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, 2)$ موازيًا المستقيم $4x - 5y = 6$

■ تقييم ذاتى (6)

الشكل التالى يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة بين المدينتين A ، B



أوجد :

1. مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.
2. بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.
3. معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

1 ∵ المستقيم يمر بالنقطتين (100 , 0) ، (500 , 5) ،

ميل الخط المستقيم يعبر عن مقدار السرعة المنتظمة (V) للسيارة

$\therefore V = \frac{500 - 100}{5 - 0} = 80$

∴ مقدار السرعة المنتظمة للسيارة = 80 كيلو متر/ ساعة

2 بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة = 100 كيلو متر

3 معادلة الخط المستقيم هى : $d = m t + b$

$\therefore d = 80 t + 100$

4 عند $t = 3$ فإن : $d = 80 (3) + 100 = 340$

∴ المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة الأصل بعد مرور 3 ساعات = 340 كيلو متر.

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 ما المقطع y بالخط المستقيم $2x - y - 5 = 0$ ؟

(أ) -5 (ب) $\frac{-5}{2}$ (جـ) $\frac{5}{2}$ (د) 5

2 ما ميل المستقيم الموازى للمستقيم $3x - 4y = 7$ ؟

(أ) $\frac{-4}{3}$ (ب) $\frac{-3}{4}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

3 ما ميل المستقيم العمودى على المستقيم $3x - 4y = 7$ ؟

(أ) $\frac{-4}{3}$ (ب) $\frac{-3}{4}$

(جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

4 ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1 , 4)$ ، $(-4 , 5)$ ؟

(أ) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ (ب) $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$

(جـ) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ (د) $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$

5 إذا كان المستقيم الذى معادلته $3y - kx = 13$ يوازى المستقيم الذى معادلته $(k - 1)x - 2y = 8$ فما قيمة k ؟

(أ) 3 (ب) 2 (جـ) 1 (د) -2

6 إذا كان المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور x عموديًا على المستقيم الذى معادلته $kx + 2y = 5$ فما قيمة k ؟

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) 2 (د) -2

7 ما معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودى على المستقيم $y = \frac{1}{3}x - 7$ ؟

(أ) $y = 3x$ (ب) $y = -3x$

(جـ) $y = \frac{1}{3}x$ (د) $y = -\frac{1}{3}x$

8 ما قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $y - \sqrt{3}x + 5 = 0$ مع الاتجاه الموجب لمحور x ؟

(أ) 30° (ب) 45° (جـ) 60° (د) 75°

9 ما معادلة المستقيم الموازى لمحور y ويمر بالنقطة $(-2 , 1)$ ؟

(أ) $x = -2$ (ب) $y = 1$

(جـ) $x = 1$ (د) $y = -2$

10 ما مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات $5x - 6y - 30 = 0$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ؟

(أ) 7.5 وحدة مربعة (ب) 15 وحدة مربعة

(جـ) 30 وحدة مربعة (د) 60 وحدة مربعة

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثانيًا تطبيق المفاهيم

11 فى كل مما يأتى أوجد ميل المستقيم والمقطع x والمقطع y :

① $-2x+5y=20$ ② $4x-2y+8=0$

③ $y=7x$ ④ $y=\frac{-2}{3}x-4$

12 فى كل مما يأتى أوجد معادلة المستقيم بصورة الميل والمقطع y:

① مستقيم ميله -2 والمقطع y يساوى 3

② مستقيم ميله $\frac{5}{2}$ والمقطع x يساوى -2

③ مستقيم ميله $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(6\,,4)$

④ مستقيم يمر بالنقطتين $(1\,,6)$ ، $(-4\,,8)$

⑤ مستقيم يمر بالنقطة $(0\,,-2)$ وعمودى على المستقيم $y=x-2$

⑥ مستقيم يمر بالنقطة $(-1\,,2)$ ويوازى المستقيم $2x+5y=10$

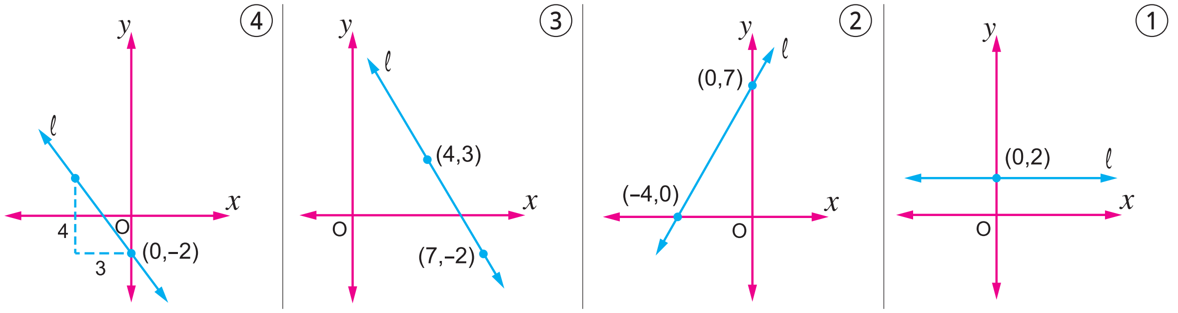
13 فى كل مما يأتى أوجد معادلة المستقيم بالصورة القياسية إذا كان :

① المقطع y يساوى 4 ، المقطع x يساوى 3

② المستقيم يمر بنقطة الأصل ويوازى المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(-3\,,5)$ ، $(2\,,4)$

③ المستقيم عمودى على $\overline{AB}$ من نقطة منتصفها حيث $A\,(2\,,5)$ ، $B\,(8\,,-3)$

14 فى كل مما يأتى أوجد معادلة المستقيم ℓ:



15 فى كل مما يأتى مثل بيانيًا المستقيم باستخدام الميل والمقطع y:

① $y=2x-3$ ② $y=\frac{-2}{5}x+2$ ③ $3x-4y-12=0$

16 إذا كان ABC مثلثًا رؤوسه هى النقط $A\,(-6\,,-8)$ ، $B\,(6\,,4)$ ، $C\,(-6\,,10)$ وكان $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$
اكتب معادلة $\overleftrightarrow{AD}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

17 شركة اتصالات تفرض 25 جنيهًا اشتراكاً شهرياً ثابتاً ، ثم 1.5 جنيه لكل جيجا بايت يتم استخدامها.

اكتب معادلة تمثل التكلفة الكلية حسب عدد الجيجا بايت المستخدمة.

18 **مبيعات :** يتقاضى مندوب مبيعات راتبًا يومياً بالإضافة إلى عمولة. عندما تصل مبيعاته 1,000 جنيه فى اليوم، فإن إجمالى ما يتقاضاه 100 جنيه، وعندما تصل مبيعاته 1,400 جنيه، فإن إجمالى ما يتقاضاه 120 جنيهًا. حيث إن العلاقة بين ما يتقاضاه والمبيعات خطية، اكتب معادلة تربط المبيعات x ، بما يتقاضاه المندوب y ، واستنتج ما يتقاضاه عندما تصل مبيعاته 2,000 جنيه فى اليوم.

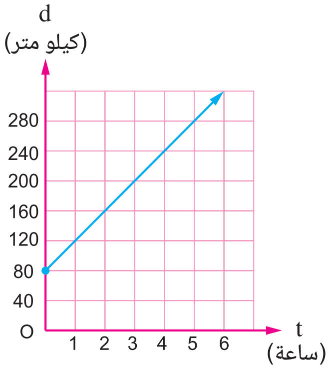
19 الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر من نقطة ثابتة ، والزمن (t) بالساعة لحركة سيارة بسرعة منتظمة. أوجد :

1 مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.

2 بُعد السيارة عن نقطة الأصل عند بدء الحركة.

3 معادلة الخط المستقيم الممثل للعلاقة بين المسافة والزمن.

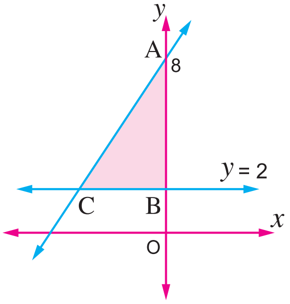
4 المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة الأصل بعد مرور 7 ساعات من بداية الحركة.



تفكير إبداعى

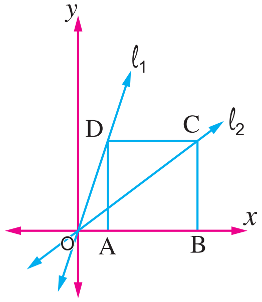
20 أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل من الأشكال التالية :

1 إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوى 12 وحدة مربعة



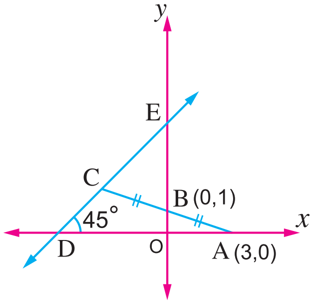
أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

2 إذا كان ABCD مربعًا وكانت معادلة المستقيم ℓ_1 هى $y = 3x$



أوجد معادلة المستقيم ℓ_2

3 إذا كانت النقطة B هى منتصف $\overline{AC}$



أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{DE}$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لمعادلة الخط المستقيم ؟

ضع علامة فى المربع المناسب.

☐ ☐ ☐ ☐

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الوحدة الثالثة

قيّم فهمك!
ما مدى فهمك للوحدة الثالثة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

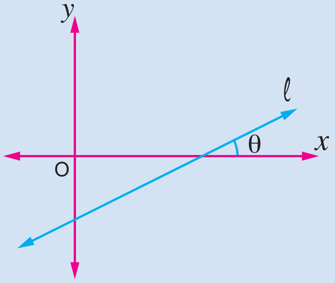
1. إذا كانت $\cos 30° = \sin 30° \tan x$ فما قيمة x حيث x قياس زاوية حادة ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (جـ) $60°$ (د) $75°$

2. فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم ℓ هى $2y = x - 4$

فأى من النسب الآتية تساوى $\tan \theta$ ؟



(أ) 1 (ب) $\frac{1}{2}$

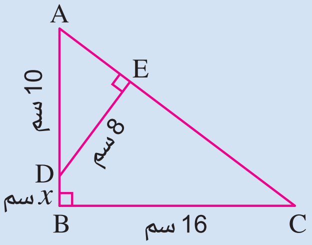
(جـ) 2 (د) $-\frac{1}{2}$

3. ما معامل التمدد الذى مركزه نقطة الأصل O ويحول النقطة $P(-3, 6)$ إلى النقطة $P'(-2, 4)$ ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) 2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

4. فى الشكل المقابل :

ما قيمة x ؟



(أ) 12 (ب) 2

(جـ) 8 (د) 4

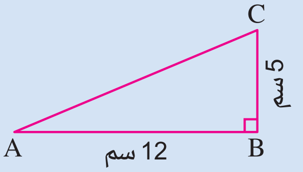
◂ أكمل كلًا مما يأتى :

5. ميل المستقيم الذى معادلته $2x - 3y - 3 = 0$ يساوى ....

6. إذا كانت النقطة A صورة النقطة $B(2, 4)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل O ومعامله 2 فإن نقطة A هى ....

7. فى الشكل المقابل :

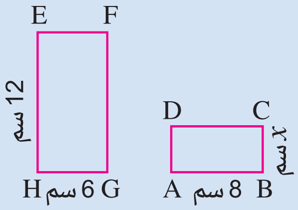
$\sin A + \cos C =$ ....



8. فى الشكل المقابل :

إذا كان المستطيل ABCD ~ المستطيل EHGF

فإن : $x =$ ....



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

◂ **أجب عن الأسئلة الآتية :**

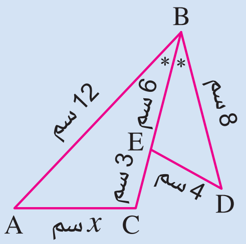
(9) ABC مثلث متساوى الساقين فيه $AB = AC = 10$ سم ، $BC = 12$ سم. أوجد $m(\angle B)$ ، $\cos \frac{A}{2}$

(10) أوجد معادلة المستقيم فى الصورة القياسية إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $A(-3, 5)$ ، $B(-1, 4)$

(11) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overrightarrow{BC}$ ينصف $\angle ABD$

فأثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta DBE$ وأوجد قيمة x



(12) إذا كانت $A(0, 1)$ ، $B(3, 2)$ ، $C(2, -2)$ مثل بيانيًا المثلث ABC وعين على الرسم صورته بتمدد معامله 2 ومركزه نقطة الأصل.

نشاط الوحدة الثالثة

استخدام تشابه المثلثات فى استنتاج علاقات نظرية إقليدس

◂ **الهدف من النشاط :**

إثبات صحة علاقات نظرية إقليدس من خلال تشابه المثلثات.

◂ **خطوات التنفيذ :**

بالاستعانة بما تعلمته عن مفهوم تشابه المثلثات نفذ الخطوات التالية، ثم قارن استنتاجك بما توصل إليه أحد زملائك :

1. ارسم مثلثًا ABC قائم الزاوية فى C
2. ارسم $\overline{CD}$ عمودية على $\overline{AB}$ تقطعها فى نقطة D
3. لاحظ المثلثات ABC ، ACD ، CBD ، ثم أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ ، $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
4. باستخدام تشابه المثلثات استنتج أن : $(AC)^2 = AB \times AD$ ، $(BC)^2 = AB \times BD$ ، $(CD)^2 = AD \times BD$
5. وضح كيف يمكن استخدام هذه العلاقات لإيجاد أطوال مجهولة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة 4

الإحصاء

درس الوحدة

4-1 مقاييس التشتت

ترتبط مقاييس النزعة المركزية والتشتت ارتباطًا وثيقًا بالذكاء الاصطناعى، إذ تُستخدم فى التنبؤ وتحليل النتائج التى تعتمد عليها خوارزميات الذكاء الاصطناعى، مما يساعد على الوصول إلى جودة التنبؤ واتخاذ القرار بشكل أكثر دقة.

◀ فهل يمكن تطوير أساليب وطرق مقاييس النزعة المركزية والتشتت فى مساعدة الذكاء الاصطناعى للحصول على نتائج أكثر دقة؟

القضايا والمهارات		القيم	
ـ التواصل الرياضى.	ـ التفكير الناقد.	ـ احترام المواعيد.	- الوعى الرياضى.
- التنبؤ.	ـ اتخاذ القرار.	- الوعى البيئى.	

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدرس

4 - 1

مقاييس التشتت
(Measures of Dispersion)

استعد !

يعتبر النوم من أهم العمليات الحيوية التى يحتاجها الإنسان لاستعادة نشاطه وتركيزه، ويُعد الحفاظ على عدد ساعات كافٍ ومنتظم يوميًا فى النوم أساسًا للأداء اليومى الفعال.

سجل أحمد عدد ساعات نومه يوميًا لمدة أسبوعين، فكانت النتائج كالتالى :

	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
الأسبوع الأول	8	7	7	6	7	6	8
الأسبوع الثانى	8	5	8	7	6	5	10

هل نام أحمد بنفس المعدل خلال الأسبوعين ؟ وأى من الأسبوعين كان عدد ساعات نوم أحمد أكثر تقاربًا ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مقاييس التشتت؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

مجموعتان من التلاميذ، تتكون كل منهما من 5 تلاميذ، أُعطيت كل مجموعة اختبارًا نهايته العظمى 50 درجة فكانت درجات التلاميذ فى كل مجموعة كما هو موضح أمامك :

المجموعة الأولى : 33 ، 33 ، 33 ، 27 ، 24

المجموعة الثانية : 43 ، 35 ، 33 ، 33 ، 6

أوجد الوسـط الحسابى والوسـيط والمنوال لكل مجموعة. أى المجموعتين درجاتها أكثر تقاربًا وأيهمـا تظهر اختلافًـا أكبر ؟ هل مقاييس النزعة المركزية وحدها كافية للحكم على مسـتوى كل مجموعة ؟

تعلم !

- درست سابقًا مقاييس النزعة المركزية كالوسط الحسابى والوسيط والمنوال، وهى مقاييس تعطى وصفًا للبيانات الإحصائية من خلال تعيين قيمة تتجمع حولها باقى القيم.
- فعند المقارنة بين درجات المجموعتين المذكورة فى بند فكر وناقش نجد أن :
  - الوسط الحسابى = 30 لكل من المجموعتين.
  - الوسيط = 33 لكل من المجموعتين.　　- المنوال = 33 لكل من المجموعتين.
- وبالرغـم مـن أن كلاً من المجموعتين لها نفس مقاييس النزعـة المركزية إلا أن المجموعتين يظهـر بينهما اختلاف فى الدرجات، ولذلك نحتاج إلـى نوع آخر من المقاييس ليصف درجة تجانس (تقارب) أو تشتت (تباعد) البيانات عن بعضها البعض.

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم التشتت.
- تعرف مقاييس التشتت لمجموعة من القيم.
- تعرف مفهوم المدى.
- تعرف مفهوم المدى الربيعى.
- تعرف مفهوم الانحراف المعيارى.
- توجد المدى والمدى الربيعى لمجموعة من البيانات معروضة بأشكال مختلفة.
- توجد الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات.
- توجد الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط، وذى مجموعات.

■ المفردات

- التشتت　Dispersion
- مقاييس التشتت　Measures of dispersion
- المدى　Range
- المدى الربيعى　Interquartile range
- الانحراف المعيارى　Standard deviation

■ معلومة سابقة

من مقاييس النزعة المركزية :

- الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$
- الوسيـط هـو القيمـة التـى تتوسـط القيـم بعد ترتيبها.
- المنوال هو القيمة الأكثر شيوعًا أو الأكثر تكرارًا.

D.M.RAZK　موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

• وبما أن درجات المجموعة الأولى لا تقل عن 24 ولا تزيد عن 33، ودرجات المجموعة الثانية لا تقل عن 6 ولا تزيد عن 43، فتكون درجات المجموعة الأولى أكثر تقاربًا من درجات المجموعة الثانية أو نقول درجات المجموعة الثانية أكثر تشتتًا من درجات المجموعة الأولى.

مقاييس التشتت

تصف مقاييس التشتت مدى تشابه أو اختلاف مجموعة من القيم أو البيانات وتقيس مدى اقتراب أو ابتعاد هذه القيم عن المركز، أى توضح مدى انتشار البيانات حول المركز. ومن مقاييس التشتت : المدى (R) والمدى الربيعى (IQR) والانحراف المعيارى (σ).

1 المدى

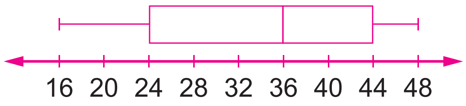
مدى مجموعة من المفردات (R) هو الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة، وهو يعتبر أبسط وأسهل طرق قياس التشتت، ولكنه يعتمد على مفردتين فقط (قيمتى الطرفين) مع إهمال باقى المفردات؛ ولذلك فهو يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 1

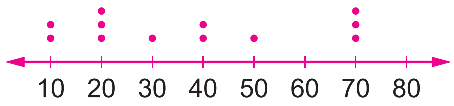
أوجد المدى لكل مجموعة من البيانات المعطاة فى كل مما يأتى :

① 48 ، 61 ، 65 ، 52 ، 38 ، 64 ، 66 ، 64

②



③



④

الساق	الأوراق
1	3 6 6 7
2	0 0 1 2 5 5 6 8
3	1 2

المفتاح 2|8 تعنى 28

✓

① $R = 66 - 38 = 28$

② $R = 48 - 16 = 32$

③ $R = 70 - 10 = 60$

④ $R = 32 - 13 = 19$

مثال 2

أوجد قيمة k التى تجعل مدى مجموعة القيم : 17 ، 12 ، 19 ، k ، 18 ، 15 ، 11 يساوى 13

✓ نلاحظ أن أصغر قيمة هى 11 ، وأكبر قيمة هى 19

• إذا كانت $11 \leq k \leq 19$ سوف يصبح المدى = 8 (مرفوض)

• إذا كانت $k > 19$ فإن :

$k - 11 = 13$

$\therefore \boxed{k = 24}$

• إذا كانت $k < 11$ فإن :

$19 - k = 13$

$\therefore \boxed{k = 6}$

■ **لاحظ أن**

عند مقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

■ **فكر**

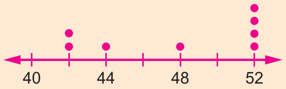
كم يكون التشتت إذا تساوت جميع قيم المفردات ؟

■ **تقييم ذاتى ①**

أوجد المدى لكل مجموعة من البيانات المعطاة فى كل مما يأتى :

① 23 ، 53 ، 43 ، 67 ، 41 ، 27 ، 35 ، 31 ، 27

②



③

الساق	الأوراق
3	2 5 7 9
4	1 3 3 4 5 5
5	4 7

المفتاح 1|4 تعنى 41

■ **تقييم ذاتى ②**

أوجد قيمة k التى تجعل مدى مجموعة القيم : 18 ، 15 ، 11 ، 20 ، k ، 8 ، 14 يساوى 18

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

2 المدى الربيعى

المدى الربيعى (IQR) هو الفرق بين الربيع الأعلى (الثالث"Q_3") والربيع الأدنى (الأول"Q_1")

أى أن $IQR = Q_3 - Q_1$

المدى الربيعى هو مدى النصف الأوسط من البيانات، وهو مقياس أكثر دقة لانتشار البيانات فى حالة وجود قيم متطرفة، ولكن من عيوبه أنه يعتمد على قيمتين فقط هما Q_1 ، Q_3 ولا يأخذ كل القيم.

مثال 3

أوجد الربيعات الثلاثة للقيم التالية، ثم احسب المدى الربيعى :

5 ، 18 ، 10 ، 23 ، 16 ، 9 ، 6 ، 12 ، 19 ، 20 ، 23

رتب القيم تصاعديًا :

5 , 6 , **9** , 10 , 12 , **16** , 18 , 19 , **20** , 23 , 23

Q_1 ، Q_2 ، Q_3

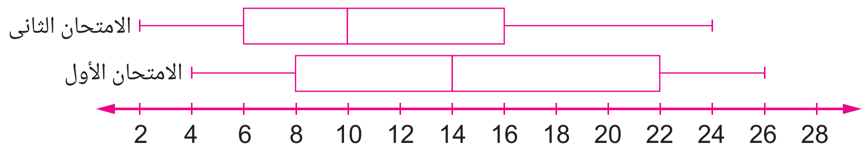
$\therefore Q_1 = 9 \quad , \quad Q_2 = 16 \quad , \quad Q_3 = 20$

$\therefore IQR = Q_3 - Q_1 = 20 - 9 = 11$

مثال 4

الشكل التالى يوضح توزيع درجات امتحانين لمجموعة من الطلاب.

أوجد المدى الربيعى لدرجات كل من الامتحانين.



بالنسبة للامتحان الأول : $\therefore IQR = 22 - 8 = 14 \qquad Q_1 = 8 \quad , \quad Q_3 = 22$

بالنسبة للامتحان الثانى : $\therefore IQR = 16 - 6 = 10 \qquad Q_1 = 6 \quad , \quad Q_3 = 16$

3 الانحراف المعيارى

الانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى، ويُرمز له بالرمز (σ) وتقرأ (سيجما). ويعتبر أهم وأدق مقاييس التشتت وأكثرها انتشارًا.

أولاً حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات :

الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات هو : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$

حيث x هى المفردة ، n هى عدد المفردات

$\bar{x}$ هى الوسط الحسابى ، $\sum$ هى عملية الجمع

■ تقييم ذاتى 3

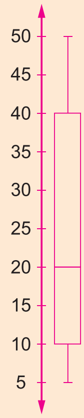
احسب المدى الربيعى لكل مما يأتى :

1 108 ، 106 ، 122 ، 107 ، 94 ، 105

2 58 ، 71 ، 73 ، 64 ، 66 ، 57 ، 67 ، 68

■ تقييم ذاتى 4

أوجد الربيعات الثلاثة من المخطط الصندوقى التالى ثم احسب كلاً من المدى، والمدى الربيعى.



■ لاحظ أن

كلما قلت قيمة الانحراف المعيارى أصبحت القيم أكثر تقاربًا وبالتالى أكثر تجانسًا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال 5

أوجد الانحراف المعيارى للقيم الآتية : 13 ، 15 ، 17 ، 18 ، 12

① أوجد الوسط الحسابى

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{13+15+17+18+12}{5}$$

$$= \frac{75}{5} = 15$$

② كوِّن الجدول المقابل.

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
13	– 2	4
15	0	0
17	2	4
18	3	9
12	– 3	9
	المجموع	26

③ احسب الانحراف المعيارى (σ) كما يلى :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{26}{5}} \approx 2.28$$

ثانيًا حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط :

الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط هو : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f.(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}}$

حيث x هى القيمة ، f هى تكرار القيمة

Σf هى مجموع التكرارات ، $\bar{x}$ هى الوسط الحسابى حيث $\bar{x} = \frac{\Sigma\,(f.x)}{\Sigma f}$

مثال 6

التوزيع التكرارى الآتى يبين أعمار 14 شخصًا يجلسون فى مطعم :

العمر	2	5	10	12	16	34
التكرار	1	2	5	2	3	1

أوجد الانحراف المعيارى لأعمار المتواجدين بالمطعم.

بفرض أن العمر (x) ، التكرار (f)

x	f	$f.x$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f.(x-\bar{x})^2$
2	1	2	– 10	100	100
5	2	10	– 7	49	98
10	5	50	– 2	4	20
12	2	24	0	0	0
16	3	48	4	16	48
34	1	34	22	484	484
المجموع	14	168			750

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\,(f.x)}{\Sigma f} = \frac{168}{14} = 12$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f.(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{750}{14}} \approx 7.32$$

■ تقييم ذاتى ⑤

أوجد الانحراف المعيارى للقيم الآتية :

7 ، 6 ، 13 ، 11 ، 8

■ تقييم ذاتى ⑥

التوزيع التكرارى التالى يبين مبيعات السيارات فى إحدى صالات البيع خلال عدة أيام :

عدد السيارات المبيعة	التكرار
0	4
1	4
2	3
3	6
4	3

أوجد الانحراف المعيارى لعدد السيارات المبيعة.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ثالثًا حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات :

الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات هو : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f.(x_m - \bar{x})^2}{\Sigma f}}$

حيث x_m هى مركز المجموعة وتساوى $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى لها}}{2}$

f هى تكرار المجموعة ، Σf هى مجموع التكرارات

$\bar{x}$ هى الوسط الحسابى حيث $\bar{x} = \frac{\Sigma (f.x_m)}{\Sigma f}$

مثال (7)

الجدول التالى يوضح كتل 50 شخصًا :

مجموعات الكتل بالكيلو جرام	– 60	– 70	– 80	– 90	– 100
عدد الأشخاص	5	11	18	9	7

أوجد الانحراف المعيارى للكتلة.

المجموعات	التكرار f	مراكز المجموعات x_m	$f.x_m$	$x_m - \bar{x}$	$(x_m - \bar{x})^2$	$f.(x_m - \bar{x})^2$
– 60	5	65	325	– 20.4	416.16	2080.8
– 70	11	75	825	– 10.4	108.16	1189.76
– 80	18	85	1530	– 0.4	0.16	2.88
– 90	9	95	855	9.6	92.16	829.44
– 100	7	105	735	19.6	384.16	2689.12
المجموع	50		4270			6792

$$\bar{x} = \frac{\Sigma (f.x_m)}{\Sigma f} = \frac{4270}{50} = 85.4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f.(x_m - \bar{x})^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{6792}{50}} \approx 11.66$$

■ **تقييم ذاتى (7)**

أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	التكرار
– 5	4
– 15	5
– 25	8
– 35	7
– 45	6

نشاط تعاونى

تعاون مع أصدقائك واستخدم أحد تطبيقات الطقس، وسجل فى جدول درجات الحرارة العظمى والصغرى فى 10 مدن مصرية خلال أحد الأيام. استخدم البيانات التى ستحصل عليها فى حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات الحرارة العظمى ودرجات الحرارة الصغرى.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

نشاط تكنولوچى استخدام الآلة الحاسبة فى حساب الانحراف المعيارى

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى حساب الانحراف المعيارى، والخطوات التالية توضح كيفية حل المثال السابق باستخدام الآلة الحاسبة.

1 يجب أولًا ضبط نظام الآلة بالضغط على المفاتيح التالية من اليسار

Start → SHIFT, MODE SETUP, ▼, 4 (STAT), 1 (ON), MODE SETUP, 3 (STAT), 1 (1-VAR)

فتظهر الشاشة المقابلة :

	x	FREQ
1		
2		
3		

2 إدخال قيم مراكز المجموعات (x_m) فى العمود الأول وذلك بالضغط على الأزرار التالية من اليسار

6 5 = 7 5 = 8 5 = 9 5 = 1 0 5 =

فتظهر الشاشة المقابلة :

	x	FREQ
4		
5	95	1
6	105	1

3 استخدم الأزرار ◄ ► ▲ ▼ للانتقال للعمود الثانى (FREQ) ثم أدخل التكرارات (f) وذلك بضغط الأزرار التالية من اليسار.

5 = 1 1 = 1 8 = 9 = 7 = AC

ثم أوجد الانحراف المعيارى بالضغط على الأزرار التالية من اليسار

SHIFT 1 4 (VAR) 3 (σ x) =

فتظهر الشاشة المقابلة :

σx
11.65504183

فتكون قيمة الانحراف المعيارى هى $\sigma \approx 11.66$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى مما يلى لا يعتبر مقياسًا للتشتت ؟

(أ) المدى　　(ب) المدى الربيعى

(جـ) الوسيط　　(د) الانحراف المعيارى

(2) ما مدى مجموعة البيانات فى الشكل التالى ؟

(أ) 50　　(ب) 220　　(جـ) 245　　(د) 270

(3) سجل القائمون على المتحف المصرى الكبير عدد الزوار بالآلاف فى عدة أيام ، لعمل دراسة إحصائية ، وكانت النتائج فى جدول تكرارى بسيط كالتالى :

الأيام	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
عدد الزوار	19	17	11	18	22	23	15

ما مدى عدد الزوار خلال هذه الأيام ؟

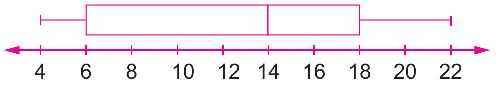
(أ) 12　　(ب) 15　　(جـ) 12000　　(د) 15000

(4) إذا كان المدى الربيعى = 8.5 وكان الربيع الأدنى = 29 فما قيمة الربيع الأعلى ؟

(أ) 12　　(ب) 21.5

(جـ) 37.5　　(د) 41.5

(5) ما قيمة المدى الربيعى من المخطط الصندوقى التالى ؟



(أ) 10　　(ب) 12　　(جـ) 14　　(د) 16

(6) إذا كان $\Sigma (x-\overline{x})^2 = 36$ لمجموعة من القيم عددها 9 فما قيمة σ ؟

(أ) 16　　(ب) 8

(جـ) 4　　(د) 2

(7) ما الانحراف المعيارى للقيم 8 ، 8 ، 8 ، 8 ، 8 ؟

(أ) 0　　(ب) 4

(جـ) 8　　(د) 16

(8) فى مخطط الساق والأوراق المقابل :

إذا كان المدى = 4.6

فما قيمة $k + m$ ؟

الساق	الأوراق
35	2 3
36	4 6 7 8
m	8 9 9
38	0 1 5
39	4 k

المفتاح 36 | 4 تعنى 36.4

(أ) 8　　(ب) 37

(جـ) 45　　(د) 37.8

(9) إذا كان المدى لمجموعة القيم 55 ، 61 ، 56 ، 59 ، a ، 54 يساوى 9 فأى مما يلى إحدى قيم a ؟

(أ) 64　　(ب) 62　　(جـ) 56　　(د) 52

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

◂ اكتشف الخطأ :

(10) عند إيجاد الانحراف المعيارى للقيم 8 ، 12 ، 6 ، 10 ، 4 كانت إجابة وائل وهانى كما يلى :

حل وائل :

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
8	0	0
12	4	16
6	−2	−4
10	2	4
4	−4	−16
المجموع		0

$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{0}{5}} = 0$

حل هانى :

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
8	0	0
12	4	16
6	−2	4
10	2	4
4	−4	16
المجموع		40

$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل ؟ ناقش.

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(11) أوجد المدى لكل مما يأتى :

(1) 20 ، 16 ، 17 ، 25 ، 24

(2) 47 ، 52 ، 41 ، 59 ، 49 ، 61 ، 76 ، 48

(3)

الساق	الأوراق
0	4 5
1	2 3 3 4 9
2	3 4 7

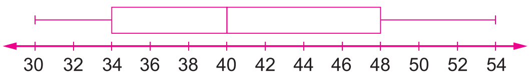
المفتاح 2|7 تعنى 27

(12) أوجد المدى الربيعى لكل مما يأتى :

(1) 33 ، 32 ، 16 ، 29 ، 17 ، 46 ، 25 ، 34

(2) 3.7 ، 2.1 ، 8.4 ، 5.1 ، 1.2 ، 2.3 ، 5.4

(3)



(13) أوجـد الانحراف المعيارى لـكل مجموعة من مجموعات القيم الآتية :

(1) 17 ، 12 ، 18 ، 13 ، 16 ، 14

(2) a + 3 ، a + 8 ، a + 7 ، a + 2 ، a + 5

(3)

الساق	الأوراق
2	2 2 5 7
3	3 5 8
4	0 0 8

المفتاح 3|5 تعنى 35

(14) بإكمال الجدول، أوجد الانحراف المعيارى لمجموعة القيم المعطاة :

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
12		
14		
15		
19		

(15) إذا كان الوسط الحسابى للقيم $x+1$ ، x ، 8 ، 4 ، 5 يساوى x ، فأوجد الانحراف المعيارى لهذه القيم.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

تحافظ الرياضة على صحة الجسم، تقوى العزيمة وتزيد الثقة بالنفس

16 رياضة : إذا كان الوسط الحسابى لأطوال مجموعة من الطلاب فى فريق كرة السلة فى إحدى المدارس الثانوية يساوى 187 سم والانحراف المعيارى 7 سم،

وكان الجدول التالى يوضح أطوال مجموعة أخرى من الطلاب فى فريق كرة اليد بالمدرسة :

طول الطالب بالسنتيمتر	184	186	188	189
عدد الطلاب	1	4	3	2

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لأطوال طلاب فريق كرة اليد، ثم قارنهما بالوسط الحسابى والانحراف المعيارى لأطوال طلاب فريق كرة السلة. أى الفريقين أطوالهم أكثر تجانسًا ؟ ولماذا ؟

17 إنترنت : إذا كان الجدول التالى يوضح استهلاك الإنترنت بال GB لأسرة خلال شهر :

استهلاك الإنترنت بال GB	10	16	18	19	23	24
عدد الأيام	3	7	8	6	4	2

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لاستهلاك الإنترنت اليومى لهذه الأسرة.

18 أجور : الجدول التالى يوضح الأجر اليومى لمجموعة من العمال بأحد المصانع :

مجموعات الأجر بالجنيه	120 –	130 –	140 –	150 –	160 –	170 –
عدد العمال	18	21	20	15	16	10

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للأجر اليومى.

تفكير إبداعى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

19 ما الانحراف المعيارى لخمسة أعداد زوجية متتالية ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{8}$

20 إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة البيانات $7X$ ، $4X$ ، $5X$ ، $6X$ ، $3X$ حيث X عدد صحيح موجب هو $4\sqrt{2}$ فما قيمة X ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

21 إذا كان الانحراف المعيارى لسبعة أعداد موجبة متتالية يساوى $\frac{\sqrt{k}}{3}$ فما قيمة k ؟

(أ) 14 (ب) 21 (جـ) 36 (د) 42

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لمقاييس التشتت ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقييم الوحدة الرابعة

قيّم فهمك!
ما مدى فهمك للوحدة الرابعة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

◂ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) من مخطط الساق والأوراق المقابل ما قيمة المدى ؟

الساق	الأوراق
26	1 4
27	4 6 7
28	7 8 9
29	2 3

المفتاح | 27|6 تعنى 27.6

(أ) 3.6 (ب) 3.4
(جـ) 3.2 (د) 3

(2) إذا كان المدى للقيم $7-3\,k$ ، $7+6\,k$ ، $7-k$ ، $7+k$ يساوى 18 ، حيث k عدد صحيح موجب فما قيمة k ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

(3) ما الانحراف المعيارى لخمسة أعداد صحيحة متتالية أصغرها 3 ؟

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) 2 (د) 1

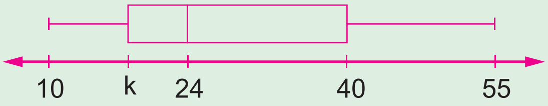
(4) أى من مجموعات القيم الآتية لها أكبر انحراف معيارى ؟

(أ) 10 ، 7 ، 9 ، 8 (ب) 5 ، 5 ، 5 ، 5 (جـ) 6 ، 5 ، 4 ، 3 (د) 16 ، 20 ، 6 ، 2

◂ **أكمل كلًا مما يأتى :**

(5) مدى مجموعة القيم : 23 ، 61 ، 43 ، 20 ، 17 ، 35 ، 29 يساوى ....

(6) من المخطط الصندوقى المقابل :



إذا كان المدى الربيعى = 22 فإن الربيع الأدنى = ...

(7) الانحراف المعيارى للقيم : $17-b$ ، $15-b$ ، $12-b$ ، $16-b$ هو ....

(8) إذا كان : $\Sigma(X-\overline{X})^2 = 60$ ، $n = 12$ ، فإن الانحراف المعيارى يساوى ....

◂ **أجب عن الأسئلة الآتية :**

(9) إذا كان التوزيع التكرارى الآتى يبين عدد الأهداف التى سجلها 30 لاعبًا من 5 ضربات جزاء لكل منهم فى أحد التدريبات :

عدد الأهداف التى تم تسجيلها	0	1	2	3	4	5
عدد اللاعبين	1	6	5	5	6	7

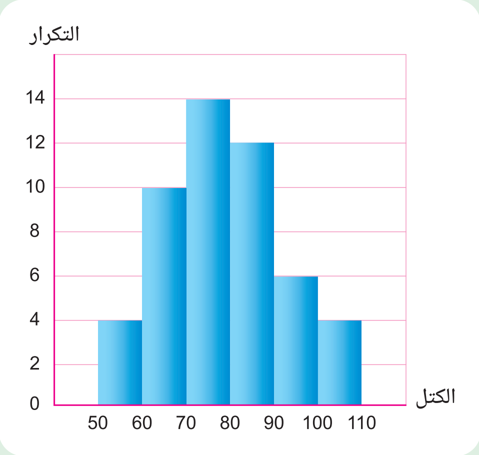
أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأهداف المسجلة.

(10) إذا كان المدى للقيم 21 ، $X+15$ ، 2 ، 5 ، 4 ، 7 يساوى 20 حيث X عدد صحيح موجب أوجد قيمة X

(11) أوجد المدى الربيعى للقيم : 15 ، 18 ، 22 ، 5 ، 29 ، 21 ، 17

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(12) إذا كان الشكل المقابل يمثل المدرج التكرارى لكتل مجموعة من اللاعبين فى أحد النوادى الرياضية. أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكتل اللاعبين.



نشاط الوحدة الرابعة

اكتشاف مقاييس النزعة المركزية والتشتت فى حياتنا اليومية

أهداف النشاط :

- إثراء تطبيق الطلاب لمقاييس النزعة المركزية والتشتت
- إكساب الطلاب مهارات جمع البيانات وتنظيمها.
- تنمية مهارات العمل الجماعى والتفكير التحليلى.

خطوات التنفيذ :

1. قسم الطلاب إلى مجموعات (2-4 طلاب فى كل مجموعة مثلًا).
2. اطلب من كل مجموعة اختيار موقف من الحياة اليومية لجمع البيانات مثل :
   - عدد ساعات استخدام تطبيقات التواصل الاجتماعى خلال أسبوع.
   - عدد ساعات المذاكرة خلال 5 أيام.
   - درجات اختبار قصير فى إحدى المواد الدراسية.
   - عدد ساعات ممارسة النشاط الرياضى المفضل لطلاب الفصل خلال أسبوع.
3. تقوم كل مجموعة بحساب ما يلى :

   الوسط الحسابى – الوسيط – المنوال – المدى – الانحراف المعيارى

   ثم يجيب الطلاب عن أسئلة مثل :

   - أى القيم تمثل البيانات بشكل أفضل ؟ ولماذا ؟
   - هل البيانات متقاربة أم متباعدة ؟
4. تقارن كل مجموعة النتائج التى حصلت عليها مع المجموعات الأخرى.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تقييم نهائى

قيِّم فهمك!

ما مدى فهمك لموضوعات الصف الثالث الإعدادى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

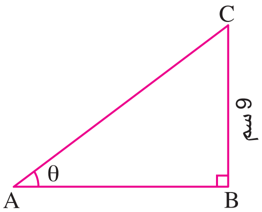
المجموعة الأولى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) ما معادلة محور تماثل الدالة التربيعية f حيث $f(x) = (x-3)^2 + 1$ ؟

(أ) $x = 1$ (ب) $y = 1$
(جـ) $x = 3$ (د) $y = 3$

(2) فى الشكل المقابل :
إذا كانت : $\sin \theta = \frac{3}{5}$
فما طول $\overline{AB}$ ؟



(أ) 4 سم (ب) 9 سم
(جـ) 12 سم (د) 15 سم

(3) ما صورة النقطة $(-3, 6)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله يساوى 3 ؟

(أ) $(-1, 2)$ (ب) $(-9, 6)$
(جـ) $(-3, 2)$ (د) $(-9, 18)$

(4) ما مجموعة الأصفار الحقيقية للدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ ؟

(أ) $\{2, 3\}$ (ب) $\{-2, 2\}$
(جـ) $\{-2\}$ (د) $\{3\}$

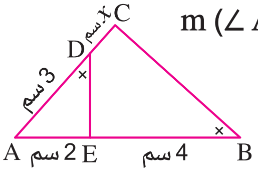
(5) ما الصورة القياسية لمعادلة المستقيم الذى زاوية ميله قياسها 45°، والمقطع y يساوى 3 ؟

(أ) $x - y = -3$ (ب) $x + y = -3$
(جـ) $x - y = 3$ (د) $x + y = 3$

(6) إذا كان : $2 \sin \theta = \tan \theta$ حيث θ قياس زاوية حادة فما قيمة θ ؟

(أ) 60° (ب) 45° (جـ) 30° (د) 15°

(7) فى الشكل المقابل :
إذا كان : $m(\angle ADE) = m(\angle B)$
فما قيمة x ؟



(أ) 1 (ب) 2
(جـ) 3 (د) 4

(8) ما ميل العمودى على المستقيم الذى معادلته : $x = 3y + 1$ ؟

(أ) -3 (ب) 3 (جـ) $\frac{-1}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$

(9) ما المدى الربيعى للبيانات الممثلة بمخطط الساق والأوراق المقابل ؟

(أ) 36 (ب) 3.6
(جـ) 4.7 (د) 2

الساق	الأوراق
3	1 2 3
4	5 5 7 8
5	1 3 4
6	7

المفتاح | 1|3 تعنى 3.1

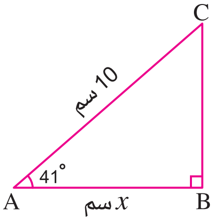
المجموعة الثانية

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

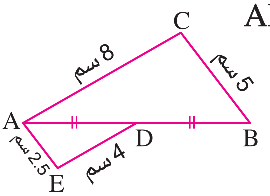
(1) أوجد فى الصورة القياسية معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, 1)$ ، $(-4, 3)$

(2) بدون استخدام الآلة الحاسبة
أثبت أن : $\tan 60° = \frac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$

(3) فى الشكل المقابل :
أوجد قيمة x مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.



(4) فى الشكل المقابل :
إذا كانت D نقطة منتصف $\overline{AB}$
فأثبت أن :
(1) $\Delta ABC \sim \Delta DAE$
(2) $\overline{AE} // \overline{BC}$



(5) اختصر لأبسط صورة $f(x)$ موضحًا مجال الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1} - \frac{5-x}{x^2-6x+5}$

(6) مثل بيانيًا الدالة التربيعية f حيث $f(x) = (x-2)^2 + 3$ موضحًا على الرسم محور تماثلها وأوجد القيمة الصغرى أو العظمى للدالة f

(7) التوزيع التكرارى التالى يبين أعمار 10 أطفال بالسنوات.

العمر بالسنوات	7	10	11	12	14	المجموع
عدد الأطفال	1	2	3	3	1	10

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

شارك فى تأليف وإعداد الكتاب شركة GPS للطبع والنشر والتوزيع

مقاس الكتاب	ورق المتن	ورق الغلاف	ألوان الكتاب	عدد الصفحات بالغلاف	تاريخ الطبعة	كود الكتاب
١٩ × ٢٧ سم	٧٠ جرامًا	١٨٠ جرامًا	٤ ألوان	صفحة		

يحظر طبع أو نشر أو تصوير أو تخزين أو توزيع أي جزء من هذا الكتاب بأية وسيلة إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو خلاف ذلك،
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

GPS
للطبع والنشر والتوزيع

الإدارة المركزية لتطوير المناهج
CACD
Central Administration Of Curriculum Development

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.Mo.RizK

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK